

# ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

---

СОСТАВИЛЪ

Н. РЫБКИНЪ.

---

ВЫПУСКЪ ПЕРВЫЙ,  
содержащій курсъ гимназій.

---

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ.

---

МОСКВА.

Изданіе книгоиздательства «Школа».

(Спирidonовка, д. № 14.)

1914.

## Предисловіе къ первому изданію.

Предлагаемый учебникъ назначается для гимназій и реальныхъ училищъ и будетъ состоять изъ двухъ выпусковъ: основнаго, соотвѣствующаго программѣ гимназій, и небольшого дополнительнаго къ нему, содержащаго тѣ статьи тригонометріи, которыми программа реальныхъ училищъ отличается отъ гимназической\*).

Обращаясь къ настоящему, первому выпуску, я долженъ прежде всего оговорить его *объемъ*. Растянутасть изданія объясняется: 1) затратой мѣста на достиженіе возможной наглядности въ текстѣ, 2) большимъ числомъ чертежей и 3) большимъ числомъ примѣровъ и сполна рѣшенныхъ задачъ\*\*). Около листа заняли «Прибавленія» — отдѣлъ, въ которомъ я помѣстилъ варианты нѣкоторыхъ доказательствъ\*\*\*) и нѣсколько замѣтокъ для учениковъ, интересующихся болѣе глубокимъ разборомъ вопроса: въ учебникѣ, назначенномъ для *старшаго* возраста, такой отдѣлъ мнѣ казался вполнѣ умѣстнымъ. [Параграфы, къ которымъ имѣются прибавленія, отмѣчены звѣздочкой, напримѣръ: 6\*, 26\* и т. д.]

Затѣмъ, я желалъ бы обратить вниманіе на особую роль подстрочнаго мелкаго шрифта. Его назначеніе — служить *учебнымъ* комментариемъ къ главному тексту: въ формѣ подстрочныхъ примѣчаній я помѣстилъ тѣ поясненія и тѣ вообще подробности, которыя полезны, или даже необходимы, ученику въ то время, когда онъ разбираетъ предметъ въ первый разъ, но которыя были бы неумѣстны въ главномъ текстѣ, потому что при повторительномъ чтеніи могли бы напрасно задерживать вниманіе. Для примѣра назову стр. 11, 13, 24, 26, 27, 28, 39, 48, 52, 53, 60, 69, 74, 93 и т. д.

Перехожу теперь къ краткому обзору отдѣльныхъ частей учебника: гониометріи, статьи о рѣшеніи треугольниковъ и статьи объ измѣреніяхъ на мѣстности.

---

\*) Графическое рѣшеніе тр-ковъ. Примѣненіе таблицъ натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ. Рѣшеніе простѣйшихъ тригонометрическихъ уравненій.

\*\*) Въ отдѣлѣ о рѣшеніи тр-ковъ помѣщено 30 задачъ.

\*\*\*) См. прибавл. къ §§ 26 и 25, 33 и 34, 47 и 48 и 64—66.

**Гониометрія** 1). Всѣ теоремы *общаго* характера доказаны въ *общемъ* же видѣ. Это казалось мнѣ и согласнымъ съ требованіями программъ \*), и желательнымъ въ интересахъ логической полноты и стройности изложения; а трудности обобщенія я старался устранить наглядностью доказательствъ и простотою его плана. [Позволю себѣ представить на судъ читателя §§ 10, 33 и 34 (и прибавл. къ нимъ), 37, 44—48 (и прибавл. къ §§ 47 и 48) и 64.]

Если бы прохожденіе гониометріи въ общемъ видѣ оказалось не соответствующимъ количеству времени или составу класса, то можно образовать сокращенный курсъ, выпустивъ нѣкоторые параграфы учебника, а §§ 64—66 замѣнивъ вариантомъ, помѣщеннымъ въ прибавленіяхъ.

2) Что касается основного въ гониометріи понятія тригонометрической функции, то здѣсь я заботился объ единствѣ и ясности принятой точки зрѣнія и объ ея строгой выдержанности \*\*). Въ учебной книгѣ я считаю важной, особенно для начинающихъ, даже выдержанность въ обозначеніяхъ.

Имѣя въ виду *обычныя* ошибки начинающихъ, я вездѣ настойчиво провожу различіе между тригонометрической функцией и тригонометрической линіей, а также ставлю не видное мѣсто вопросу о знакахъ.

3) Когда приходится сравнивать два тригонометрическихъ выраженія по абсолютной величинѣ и знаку \*\*\*), то я произвожу эти сравненія не совмѣстно, а раздѣльно, стараясь тѣмъ выразить равноцѣнность

\*) Такъ въ гимназической программѣ значится между прочимъ: «Измѣненіе тригонометрическихъ величинъ съ измѣненіемъ дугъ *отъ 0 до  $\infty$  и отъ 0 до  $-\infty$* ».

Въ объяснительной запискѣ къ программѣ реальныхъ училищъ читаемъ: «При рѣшеніи тригонометрическихъ уравненій необходимо заставлять учениковъ выписывать всѣ рѣшенія этихъ уравненій въ видѣ *общихъ формулъ*». Рѣшеніе же тригонометрическихъ уравненій въ общемъ видѣ предполагаетъ пользованіе общностью теоремъ, а слѣдовательно — въ своемъ мѣстѣ — и доказательство этой общности.

Указаніе объяснительной записки, что слѣдуетъ касаться теорій тригонометрическихъ функций лишь настолько, насколько она необходима для рѣшенія треугольниковъ, я отношу къ *выбору* теоремъ.

Даже въ рѣшеніи треугольниковъ, если его вести строго, приходится иногда выступать изъ обычныхъ границъ аргумента (см. числовой примѣръ въ § 145 и замѣчаніе къ § 134).

\*\*) Позволю себѣ выдѣлить тѣ мѣста учебника, въ которыхъ содержится постепенное ознакомленіе учащагося съ тригонометрическими функциями; эти мѣста слѣдующія: 3-й отрывокъ § 1, послѣдній отрывокъ § 5 и затѣмъ §§ 11—22.

\*\*\*) Напр. при составленіи формулъ приведенія.

обоихъ элементовъ количества \*) (§ 36 примѣръ 2, 2-й способъ; §§ 37, 38, 45—48). Я счелъ также полезнымъ разобрать и нѣкоторые сбивчивые случаи въ изслѣдованіи знаковъ (см. напр. прибавл. къ § 73).

4) Далѣе, я желалъ бы обратить вниманіе читателя на приведенный въ § 26 «общій принципъ» и на изложеніе *периодичности* тригонометрическихъ функций (§§ 29 и 30): *обычное* опредѣленіе периодичности (помѣщенное у меня въ формѣ теоремы въ концѣ § 30), будучи вполне строгимъ, неудобно тѣмъ, что не вызываетъ отчетливаго *представленія*.

5) Къ таблицамъ я приступаю немедленно послѣ того, какъ ученику станетъ понятнымъ ихъ ограниченіе острыми углами (гл. IV). Но при этомъ я не останавливаюсь на устройствѣ таблицъ и на обращеніи съ ними, находя излишнимъ повторять въ учебникѣ то, что имѣется уже при самыхъ таблицахъ \*\*). [О составленіи таблицъ см. въ гл. VII.]

6) Нахожденіе угловъ между 0 и  $360^\circ$  и опредѣленіе угла въ общемъ видѣ помѣщено главнымъ образомъ для тригонометрическихъ уравненій. Получаемыя формулы, затруднительныя для ученика по своей отвлеченности (напр. формулы § 59), я старался пояснить наглядными иллюстраціями.

7) Что касается рѣшенія тригонометрическихъ уравненій, то подробное изложеніе его теоріи и приемовъ будетъ дано во второмъ выпускѣ учебника. Въ настоящемъ же выпускѣ тригонометрическія уравненія встрѣчаются въ §§ 99, 102, 103, 104, 106, 107, 144 и 145.

**Рѣшеніе треугольниковъ.** 1) Такъ какъ характеръ этого отдѣла преимущественно *прикладной*, то я счелъ уместнымъ привести въ двухъ особыхъ замѣткахъ нѣсколько общихъ указаній о рѣшеніи задачъ (§§ 68—90 и 108).

2) Излагая приемы рѣшенія треугольниковъ, я держался сказаннаго въ § 90. Иногда я упоминалъ также о степени точности вычисленія и о способахъ повѣрки (§§ 96, 126, 129, 130, прибавл. къ § 126 и прибавл. къ § 129).

3) Что касается такъ называемыхъ особыхъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ, то — по соображеніямъ методическимъ — я помѣтилъ ихъ довольно много, выбравъ, конечно, болѣе важныя или типическіе \*\*\*).

\*) Ученики большею частію склонны считать какъ тригонометрической функции менѣе важнымъ, чѣмъ абсолютная величина, и это вредитъ отчетливости усвоенія.

\*\*) Чтобы статья объ устройствѣ и употребленіи таблицъ достигала цѣли, она, во-первыхъ, должна относиться къ тѣмъ именно таблицамъ, какія у ученика на рукахъ, а во-вторыхъ, должна быть изложена не въ тонѣ учебника, а въ тонѣ самоучителя. По моему мнѣнію, обращеніе къ таблицамъ есть дѣло непосредственнаго обученія въ классѣ.

\*\*\*). Большую часть ихъ я взялъ изъ задачъ, предлагавшихся на обязательныхъ испытаніяхъ

которыя изъ этихъ задачъ рѣшены въ учебникѣ двумя способами (§§ 113, 134, 135, 136, 137 и 139), а двѣ задачи тремя способами (§§ 99 и 138).

4) Я обращалъ вниманіе также на изслѣдованіе задачи, на сопоставленіе результатовъ, полученныхъ различными путями, и т. п. (см. замѣчанія—въ текстѣ и подстрочныя—къ §§ 99, 106, 107, 111, 113, 131, 134, 139, 141 и 143). Въ этомъ я видѣлъ средство оживить изложеніе.

**Измѣренія на мѣстности.** Здѣсь я ограничился только самымъ главнымъ. При этомъ я старался, чтобы статья имѣла характеръ по возможности *геодезическій*, такъ что, излагая то или другое примѣненіе тригонометріи, я рассматривалъ и его геодезическую сторону.

---

При составленіи предлагаемаго руководства мнѣ служили пособіемъ кромѣ русской учебной литературы еще слѣдующія сочиненія: «Алгебраическій анализъ» Коши и курсы тригонометріи Брю и Буке, Ребьера, Серре и Schlömilch'a. Для статьи объ измѣреніяхъ на мѣстности я пользовался преимущественно «Курсомъ низшей геодезіи» А. Бика.

Читатель безъ труда выдѣлитъ самъ, что въ учебникѣ заимствовано изъ названныхъ источниковъ и что принадлежитъ составителю; и позволю себѣ только заявить, что §§ 10, 29, 44—48, 52—59 и 64 относятся къ числу обработанныхъ самостоятельно.

Мартъ 1894 г.



Второе и третье изданія отличаются отъ перваго лишь незначительныя ми исправленіями.

# О Г Л А В Л Е Н И Е.

## В В Е Д Е Н И Е.

Стран.

Предметъ и раздѣленіе тригонометріи. Замѣчаніе о гра-  
фическомъ рѣшеніи тр-ковъ. О функціяхъ вообще; значеніе  
таблицъ. Двойное измѣреніе дугъ и угловъ . . . . . 1— 5

## О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЯХЪ (ГОНИОМЕТРІЯ).

I. Предварительныя понятія. Обобщеніе понятій объ углѣ и  
дугѣ. Общий видъ дугъ и угловъ, имѣющихъ одни и  
тѣ же начало и конецъ. Тригонометрическіи кругъ.  
Тригонометрическія линіи . . . . . 6— 10

II. Тригонометрическія функціи. Ихъ измѣненія и взаимная  
зависимость.

Общее опредѣленіе тригонометрическихъ функцій. Назва-  
нія и обозначенія. Примѣры вычисленія тригономет-  
рической функціи по данному углу. Построеніе подвиж-  
наго радіуса по данной тригонометрической функціи. 11— 20

Измѣненія тригонометрическихъ функцій съ измѣненіемъ  
аргумента. Периодичность тригонометрическихъ функцій. 20— 24

Зависимость между тр. фф. одного и того же угла. При-  
мѣры вычисленія однѣхъ тр. фф. съ помощью другихъ. 25— 29

III. Формулы приведенія. Перемѣна знака въ аргументѣ. При-  
веденіе тр. фф. всякаго угла къ фф. положительнаго  
острого. Общность формулъ приведенія . . . . . 30— 39

IV. Примѣненіе таблицъ къ вычисленію тригонометрическихъ  
выраженій и къ нахожденію угловъ. Полученіе угла  
въ общемъ видѣ. Вычисленіе нѣкоторыхъ выраженій,  
содержащихъ тригоном. функціи. Нахожденіе угловъ  
между 0 и  $360^\circ$ . Общий видъ угла для данной функціи. 40— 48

V. Формулы сложенія аргументовъ, вычитанія, умноженія и  
дѣленія. Нѣкоторые изъ теоремъ о тр-кѣ. Синусъ суммы  
двухъ угловъ. Синусъ разности двухъ угловъ. Коси-  
нусъ суммы и разности двухъ угловъ. Синусъ, косинусъ  
и тангенсъ двойнаго угла. Синусъ, косинусъ и тангенсъ  
половины угла. . . . . 49— 57

VI. Приведеніе выраженій къ виду удобному для логари-  
мированія. Общее замѣчаніе. Преобразованіе суммы и  
разности двухъ синусовъ или косинусовъ. Преобразо-  
ваніе суммы и разности двухъ тангенсовъ или котанген-  
совъ. Преобразованіе  $(\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta)$  и  
 $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ . Преобразованіе  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$  при условіи  
 $\alpha + \beta + \gamma = 180$ . Введеніе вспомогательнаго угла . . . . . 58— 63

VII. Понятіе о составленіи тригонометрическихъ таблицъ.  
Сведеніе къ малому углу. Приближенное вычисленіе  
синуса малаго угла; приближенное вычисленіе косинуса  
малаго угла. Замѣчаніе о существующихъ уже табли-  
цахъ и о составленіи новыхъ . . . . . 64— 67

## О РѢШЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ (тригонометрія).

Нѣкоторыя общія замѣчанія о рѣшеніи треугольниковъ . . . 68 и

**VIII. Прямоугольные треугольники.** Соотношенія между элементами прямоугольнаго треугольника. Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ. Нѣкоторые болѣе сложные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ (10 задачъ). Замѣчаніе о двоякомъ характерѣ рѣшенія треугольниковъ . . . 70—

**IX. Нѣкоторыя примѣненія прямоугольныхъ треугольниковъ.** Общее замѣчаніе. Задачи (5 задачъ) . . . 80—

**X. Косоугольные треугольники.** Соотношенія между элементами косоугольнаго тр-ка; выраженія площади тр-ка. Основные случаи рѣшенія косоугольныхъ тр-ковъ. Нѣкоторые болѣе сложные случаи рѣшенія косоугольныхъ тр-ковъ (15 задачъ). . . . . 85—1

## ОБЪ ИЗМѢРЕНІЯХЪ НА МѢСТНОСТИ.

**XI. Измѣреніе линий и угловъ на земной поверхности. Простѣйшіе углоизмѣрныя инструменты.** Общее замѣчаніе. Измѣреніе линий. Измѣреніе угловъ; общее понятіе объ углоизмѣрныхъ инструментахъ. Буссоль. Астролябія; измѣреніе горизонтальнаго угла и угла наклоенія. Замѣчаніе о теодолитѣ. . . . . 111—1

**XII. Приложение прямолинейной тригонометріи къ производству измѣреній на мѣстности.** Общее замѣчаніе. Опредѣленіе непреступныхъ разстояній. Опредѣленіе высоты. Триангуляція . . . . . 117—1

## ПРИБАВЛЕНІЯ.

О десятичномъ дѣленіи окружности. Къ вопросу объ измѣненіи тр. фф. съ измѣненіемъ аргумента. Одинаковыя фазы въ ходѣ периодической функціи. Вариантъ вывода соотношеній между тр. фф. одного угла; о числѣ этихъ соотношеній. Къ формуламъ приведенія (общимъ). Понятіе объ обратныхъ круговыхъ функціяхъ. Выводъ формулъ для  $\sin(\pm\beta)$  и  $\cos(\pm\beta)$  при условіи, что  $\alpha > \beta > 0$  и  $\alpha + \beta < 90^\circ$ . Выраженіе тр. фф. угла черезъ тангенсъ его половины. Доказательство двойныхъ знаковъ въ фор-

мулахъ  $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$  и  $\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ .

Преобразов. форм.  $\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ . О числѣ соотношеній

между элементами тр-ка; выводъ формулы  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  изъ соотношеній, принятыхъ за основныя. Къ рѣшенію тр-ка по даннымъ  $b, c$  и  $A$ : повѣрка вычисленія съ помощью формулъ Мольвейде. Къ рѣшенію тр-ка по даннымъ  $a, b$  и  $A$ : 1) изслѣдованіе задачи по сторонамъ  $c$ ; 2) повѣрка вычисленія въ случаѣ двухъ рѣшеній и иной способъ опредѣленія  $c_1$  и  $c_2$  . . . . . 122—1.

## ВВЕДЕНИЕ.

1. Предметъ и раздѣленіе тригонометріи. Основную задачу тригонометріи составляетъ рѣшеніе треугольниковъ съ помощью *вычисленія*<sup>1)</sup>. *Рѣшить* треугольникъ значитъ найти *числовую* величину его элементовъ по достаточной совокупности данныхъ также *числовыхъ*.

Вообще же къ тригонометріи относится бѣльшая часть вопросовъ, гдѣ въ число данныхъ или искомыхъ входитъ уголъ, равно и другіе случаи, въ которыхъ примѣняются свойства тригонометрическихъ функцій.

*Тригонометрическія функціи* угловъ суть особаго рода числа, вводимыя въ вычисленіе *взамѣнъ* угловъ; эти числа, хотя и не выражаютъ угловъ съ помощью мѣры, тѣмъ не менѣе такъ связаны съ ними, что служатъ какъ бы ихъ замѣстителями.

2. Разсмотрѣніе свойствъ тригонометрическихъ функцій должно предшествовать рѣшенію треугольниковъ.

Такимъ образомъ въ тригонометріи различаютъ два главныхъ отдѣла:

1) ученіе о тригонометрическихъ функціяхъ, называемое *гоиометріей*, и

2) ученіе о рѣшеніи треугольниковъ, составляющее *тригонометрію* въ тѣсномъ смыслѣ.

*Замѣчаніе.* Тригонометрія, содержащая рѣшеніе обыкновенныхъ треугольниковъ, называется *прямолинейной* (или *плоской*) въ отличіе отъ *сферической* тригонометріи, въ которой разсматриваются такъ называемые сферическіе треугольники.

---

<sup>1)</sup> Ниже будетъ сказано еще о *графическомъ* рѣшеніи треугольниковъ.



**3. Замѣчаніе о графическомъ рѣшеніи треугольниковъ.** Кромѣ тригонометрическаго рѣшенія треугольниковъ существуетъ еще *графическое*, т.-е. такое, въ которомъ примѣняется *построеніе*. Оно состоитъ въ слѣдующемъ: элементы, данныя въ числахъ, сначала воспроизводятъ по масштабу и транспортиру; затѣмъ, пользуясь полученными линіями и углами, строятъ искомыя элементы (при чемъ образуется фигура, которая подобна рѣшаемой); наконецъ, измѣряя ихъ съ помощью тѣхъ же приборовъ, получаютъ требуемыя числа.

При такомъ приѣмѣ неизбѣжны погрѣшности, — иногда значительныя, — а такъ какъ онѣ зависятъ отъ качества чертежныхъ принадлежностей и отъ искусства черченія, то и не допускаютъ оцѣнки. Это обстоятельство дѣлаетъ графическій способъ мало надежнымъ, между тѣмъ какъ тригонометрія, примѣняя вычисленіе, даетъ средство опредѣлять искомыя величины съ желаемой степенью точности.

**4. О функціяхъ вообще.** Существуютъ перемѣшныя величины, связанныя между собою такъ, что каждому значенію одной изъ нихъ *соотвѣтствуетъ* значеніе (или даже нѣсколько значеній) другой. Таковы, напримѣръ,  $y$  и  $x$  въ равенствахъ:  $y = a + x$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = \lg x$ ; таковы же радіусъ круга и его площадь, ребро куба и его объемъ, и т. д.

Если требуется подобрать соотвѣтственные значенія такихъ величинъ или прослѣдить ходъ измѣненія ихъ, то мы должны назначить рядъ значеній одной изъ нихъ и по нимъ опредѣлять значенія другой величины. Напримѣръ, составляя таблицу логарифмовъ, принимаютъ въ уравненіи  $y = \lg x$  за  $x$  послѣдовательно 1, 2, 3, . . . и по этимъ числамъ находятъ рядъ значеній  $y$ .

*Величина, которая въ данномъ вопросѣ получаетъ свои значенія въ зависимости отъ другой, называется функціей ея, а та, которая при этомъ принимаетъ свои значенія непосредственно, называется аргументомъ.* Такъ, если, имѣя уравненіе  $y = x^n$ , будемъ мѣнять  $x$  и опредѣлять  $y$ , то  $x$  есть аргументъ, а  $y$  функція; если же станемъ назначать  $y$  и подбирать  $x$ , то  $y$  есть аргументъ, а  $x$  функція. Вообще, что служить функціей и что аргументомъ, зависитъ отъ свойствъ вопроса.

**5. Функція и аргументъ могутъ быть или однородны, какъ напр. произведеніе и множимое, или разнородны, какъ напр. дуга и центральный уголъ.**

Что касается самой зависимости между функціей и аргументомъ, то иногда она выражается такъ просто, что функцію легко

вычислить по аргументу въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, какъ напр. площадь квадрата по его сторонѣ; въ другихъ функціяхъ, наоборотъ, рядъ дѣйствій при точномъ или приближенномъ вычисленіи ихъ настолько сложенъ, что для практическихъ приложений разъ навсегда заготовляютъ ряды значеній аргумента и функцій и помѣщаютъ ихъ въ особыхъ *таблицахъ*; таковы напр. таблицы логарифмовъ, таблицы квадратныхъ и кубическихъ корней и т. п.

Иногда пользуются таблицами и при неособенно сложныхъ дѣйствіяхъ — ради удобства и сбереженія времени<sup>1)</sup>. Но для функцій такихъ какъ логарифмы таблицы *необходимы*: практическое примѣненіе логарифмы получили только тогда, когда были составлены достаточно точныя и удобныя таблицы.

Къ числу функцій этого рода относятся и тригонометрическія функцій; для нихъ также имѣются таблицы, *которыя и составляютъ одну изъ главныхъ принадлежностей тригонометріи*: безъ таблицъ тригонометрическія функцій не имѣли бы практическаго приложения.

**6\*. Измѣреніе дугъ и угловъ.** Какъ извѣстно изъ геометріи, углы весьма легко опредѣляются съ помощью дугъ.

*Если дуга служитъ для опредѣленія угла, то ее выражаютъ или 1) въ отношеніи къ окружности или 2) въ отношеніи къ радиусу<sup>2)</sup>.*

*Первый способъ* — это извѣстное изъ геометріи *градусное измѣреніе* дуги, когда она выражается составнымъ числомъ въ доляхъ окружности: градусахъ, минутахъ и секундахъ.

Градусному измѣренію дуги соответствуетъ градусное измѣреніе угла. Выгода этого соответствія та, что уголь<sup>3)</sup> и дуга выражаются однимъ и тѣмъ же числомъ.

Но не должно забывать, что градусное выраженіе дуги показываетъ лишь ея отношеніе къ окружности, между тѣмъ какъ градусное выраженіе угла опредѣляетъ его вполне (позволяетъ воспроизвести уголь).

<sup>1)</sup> Такова, напримѣръ, таблица умноженія, которую обыкновенно запоминають.

<sup>2)</sup> Первый способъ нагляднѣе и примѣняется въ практическихъ измѣреніяхъ, второй предпочитаютъ въ теоретическихъ вопросахъ.

<sup>3)</sup> Центральный.

Второй способ называется *линейнымъ измѣреніемъ* дуги: вѣдѣна она выражается въ отношеніи къ радіусу, при чемъ мы пользуемся не самой дугой, а ея *длиной* (*выпрямленной дугой*); такъ, по этому способу окружность выразится числомъ  $2\pi$ , полуокружность числомъ  $\pi$ , и т. д.

Покажемъ, что, зная отношеніе дуги къ радіусу, можно опредѣлить уголъ, и обратно. Дѣйствительно, пусть крив. дуга выражается (въ радіусѣ) числомъ  $a$ ; тогда длина ея есть  $aR$ . Означая искомый уголъ черезъ  $x$  и прямой уголъ черезъ  $d$ , будемъ имѣть

$$x : 4d = aR : 2\pi R \quad \text{или} \quad x : 4d = a : 2\pi,$$

откуда можно опредѣлить  $x$  по данному  $a$ , и обратно.

Можно сдѣлать, что уголъ и дуга будутъ выражаться однимъ и тѣмъ же числомъ<sup>1)</sup>: для этого надо за мѣру для угловъ принять такой уголъ, котораго дуга имѣетъ *длину* радіуса (этотъ уголъ равенъ  $\frac{2d}{\pi}$ , слѣдовательно есть величина постоянная, почему и можетъ служить мѣрой). Такое измѣреніе угла будемъ называть также *линейнымъ*, а новую угловую мѣру *радіаномъ* (особаго обозначенія эта мѣра не имѣетъ).

7. Въ послѣдующемъ, для ясности, будемъ градусное выраженіе дуги или угла обозначать черезъ  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , а линейное выраженіе черезъ  $a, b, c, \dots$ ; обозначенія же  $x, y, z, \dots$  будемъ брать въ обоихъ смыслахъ.

Для перехода съ градуснаго выраженія на линейное или обратно служить пропорція

$$\alpha : 360^\circ = a : 2\pi,$$

$$\text{откуда } a = \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} \quad \text{и} \quad \alpha = 180^\circ \cdot \frac{a}{\pi}^*)$$

**Примѣры.** 1) Какъ выразится въ градусной системѣ дуга, имѣющая длину радіуса (выражаемая въ радіусахъ числомъ единица)?

По предыдущему эта дуга равна  $180^\circ \cdot \frac{1}{\pi}$ ; пользуясь приближен-

<sup>1)</sup> Но, конечно, въ неодинаковыхъ единицахъ.

\*)  $\pi = 3, 14159\ 26535\ 89793\ 23846\ \dots$

$\frac{1}{\pi} = 0, 31830\ 98861\ 83790\ 67153\ \dots$

нымъ значеніемъ  $\frac{1}{\pi}$ , найдемъ, что она содержитъ  $57^{\circ} 17' 44'', 8$  съ точностью до  $0,05''$  (это же есть градусное выраженіе радіана).

2) *Найти линейное выраженіе дуги  $67^{\circ} 30'$  (выразить въ радіанахъ уголъ  $67^{\circ} 30'$ ).* Означая, искомое число черезъ  $x$ , получимъ по предыдущему  $x = \pi \cdot \frac{67^{\circ} 30'}{180^{\circ}} = \pi \cdot \frac{3}{8}$ ; приближенное вычисленіе дастъ  $x = 1,17810$  съ точностью до  $\frac{1}{2}$  стотысячной доли.

Замѣчаніе. Для облегченія такихъ переходовъ существуютъ особлыя таблицы: такова напр. «*Таблица для выраженія дугъ въ частяхъ радіуса и обратно*», приложенная къ логарифмическимъ таблицамъ Е. Пржевальскаго.

# О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЯХЪ.

(Гониометрія.)

---

## І. Предварительныя понятія.

**8. Обобщеніе понятій объ углѣ и дугѣ.** Геометрическія понятія угла и дуги въ тригонометріи нѣсколько видоизмѣняются и расширяются<sup>1)</sup>.

1) Угломъ въ тригонометріи называютъ *поворотъ* одной стороны относительно другой, т.-е. представляютъ себѣ, что одна сторона неподвижна, а другая, вращаясь, описала данное число угловыхъ единицъ; при этомъ получаются углы и *болѣе*  $360^\circ$  (такъ, можно сказать: проволока закручена на  $400^\circ$ ; минутная стрѣлка въ теченіе 3 ч. 25 м. повертывается на  $1230^\circ$ ; и т. д.

Кромѣ *величины* поворота различаютъ его *направленіе*: если вращеніе можетъ происходить по *двумъ* *противоположнымъ* направленіямъ, то при *одномъ* изъ нихъ уголь выражаютъ *положительнымъ* числомъ, а при *другомъ* — *отрицательнымъ* (выборъ знака зависитъ отъ условій вопроса).

2) Подобное же распространяется и на дуги: дуга разсматривается какъ путь, который проходитъ точка, двигаясь по окружности (при этомъ точка можетъ обойти окружность не одинъ разъ и въ двухъ направленіяхъ); въ дугѣ также различаютъ *направленіе* (одно изъ двухъ противоположныхъ) и приписываютъ ей тотъ же знакъ, какой имѣетъ уголь.

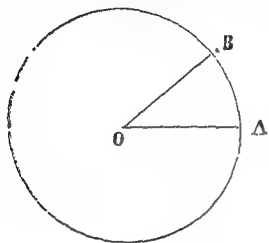
**9.** Итакъ въ тригонометріи уголь и дуга суть *перемѣнныя* величины, способныя принимать все значенія отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ .

---

<sup>1)</sup> Главнымъ образомъ ради приложенийъ въ высшей математикѣ.

Означая уголъ и дугу какой-либо буквой, будемъ подъ ней подразумѣвать число и знакъ; напримѣръ:  $\alpha = -1070^\circ$ ;  $b = -\frac{\pi}{6}$ ;  $c = 1,03$ ; и т. д.

**10. Общій видъ дугъ и угловъ, имѣющихъ одни и тѣ же начало и конецъ.** Возьмемъ какую-нибудь дугу, напр.  $750^\circ$ ; пусть будутъ  $A$  и  $B$  ея начало и конецъ. Разсмотримъ другія дуги, начинающіяся въ той же точкѣ  $A$ .



Черт. 1.

Очевидно, что тѣ изъ нихъ, которыя отличаются отъ  $750^\circ$  на *полное* число *окружностей*<sup>1)</sup>, оканчиваются также въ точкѣ  $B$ , а всѣ другія въ этой точки.

Такимъ образомъ, начиная всѣ дуги отъ точки  $A$ , получимъ слѣдующій рядъ дугъ ( $x$ ), оканчивающихся въ точкѣ  $B$ .

$x$	.....	$-690^\circ$	$-330^\circ$	$30^\circ$	$390^\circ$	$750^\circ$	$1110^\circ$	$1470^\circ$	.....
$n^*)$	.....	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	.....

Этотъ рядъ есть *арифметическая прогрессія* (безконечная въ *обѣ стороны*), въ которой одинъ изъ членовъ есть  $750^\circ$ , а разность равна  $360^\circ$ ; всѣ члены этой прогрессіи можно получить по формулѣ  $x = 750^\circ + 360^\circ \cdot n$ , придавая  $n$  всѣ *цѣлыя* значенія отъ  $-\infty$  до  $+\infty$  (см. нижнія числа въ таблицѣ).

Итакъ, если  $\alpha$  есть одна изъ дугъ, имѣющихъ данныя начало и конецъ, то *общій видъ* всѣхъ дугъ, имѣющихъ тѣ же начало и конецъ, есть  $\alpha + 360^\circ \cdot n$ , гдѣ  $n$  означаетъ переменное *цѣлое* число (положительное, отрицательное, нуль).

Если дуга выражена въ доляхъ радіуса, то формула приметъ видъ:

$$\alpha + 2\pi \cdot n \quad (\text{такъ, вмѣсто } 750^\circ + 360^\circ \cdot n \text{ получилось бы } \frac{25}{6} \pi + 2\pi \cdot n).$$

Сказанное выше о дугахъ относится и къ угламъ.

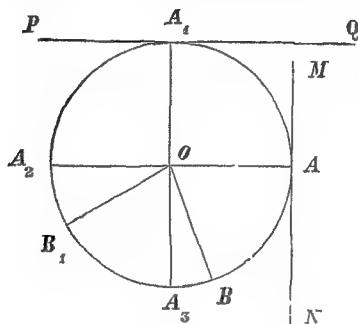
**11. Вступительное замѣчаніе къ §§ 12—15.** Тригонометрическія функціи, о которыхъ будетъ рѣчь ниже, связаны съ углами *отчасти* при помощи построенія. Это построеніе состоитъ: 1) въ *опредѣленномъ* нанесеніи на кругъ даннаго угла какъ *центральной*

<sup>1)</sup> На  $360^\circ$  повторенные одинъ или нѣсколько разъ.

<sup>\*)</sup> Нижнія числа объясняются далѣе.

наго и 2) въ проведеніи при этомъ кругъ особыхъ линий, съ помощью которыхъ и получаются тригонометрическія функціи. Разсмотримъ указанныя построенія.

**15. Тригонометрический кругъ.** Опишемъ кругъ произвольнымъ радіусомъ и проведемъ два перпендикулярныхъ діаметра; для крат-



Черт. 2.

кости будемъ ихъ называть *горизонтальнымъ* ( $AA_2$ ) и *вертикальнымъ* ( $A_1A_3$ )\*), а оба безразлично *главными*.

Будемъ углы отсчитывать отъ одного и того же начала, а именно отъ праваго горизонтальнаго радіуса ( $OA$ ); положительныя углы будемъ откладывать вверхъ отъ него (противъ стрѣлки часовъ), а отрицательныя внизъ<sup>1)</sup>. Стороны угла будемъ различать назва-

ніями: *начальный радіусъ* (общее начало угловъ) и *подвижной радіусъ*.

Задаіемъ угла вполне опредѣляется положеніе подвижнаго радіуса, но не обратно: для даннаго подвижнаго радіуса можно предположить сколько угодно угловъ (§ 10).

Четыре части, на которыя кругъ дѣлится главными діаметрами, будемъ называть *четвертями* (или *квадрантами*); онѣ считаются въ такомъ порядкѣ:  $AOA_1$  первая четверть (первый квадрантъ),  $A_1OA_2$  вторая четверть и т. д.

Примемъ еще слѣдующій способъ выраженія: если уголъ оканчивается, положимъ, въ III четверти, то будемъ его называть: «уголъ III четверти», и т. п.; но такое указаніе, конечно, ничего не говоритъ о величинѣ угла: такъ углы  $120^\circ$ ,  $500^\circ$  и  $-200^\circ$  одинаково назовемъ углами II четверти. Если подвижной радіусъ приходится на одномъ изъ главныхъ діаметровъ, то уголъ можно отнести къ двумъ четвертямъ: напр.  $540^\circ$  можно разсматривать какъ уголъ II четверти или III четверти.

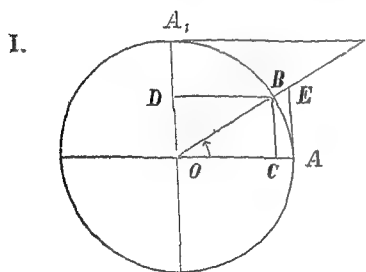
Соотвѣтственно угламъ отсчитываются и дуги.

\*) Они и могутъ быть такими, если плоскость чертежа вертикальна.

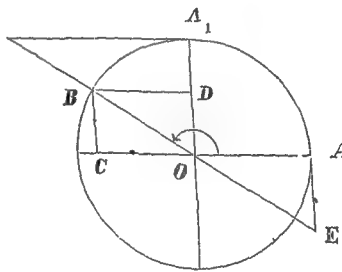
<sup>1)</sup> Такъ углы  $650^\circ$  и  $-150^\circ$ , начинаясь общимъ радіусомъ  $OA$ , оканчиваются радіусами  $OB$  и  $OB_1$ .

13. Крім главных діаметровъ въ тригонометрическомъ кругѣ проводятъ еще двѣ касательныя: чрезъ начало и конецъ первой четверти<sup>1)</sup>; будемъ ихъ называть: *первая касательная* ( $MN$ ) и *вторая касательная* ( $PQ$ ).

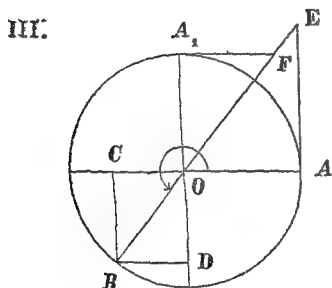
14. Тригонометрическія лінії. Такъ называются тѣ лінії, посредствомъ которыхъ будутъ опредѣлены тригонометрическія функціи; эти лінії суть слѣдующія (на прилагаемыхъ чертежахъ онѣ показаны для каждой четверти отдѣльно; при каждомъ подвижномъ радіусѣ отмѣченъ наименѣйшій положительный уголъ).



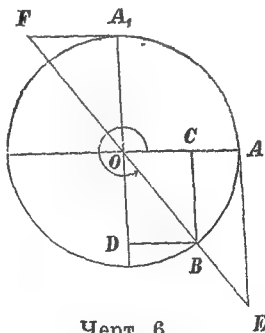
Черт. 3.



Черт. 4



Черт. 5.



Черт. 6.

1. Вертикальная проекція подвижного радіуса<sup>2)</sup> ( $OD$ ) или перпендикуляръ ( $BC$ ), опущенный изъ конца дуги на горизонтальный діаметръ.

2. Горизонтальная проекція подвижного радіуса ( $OC$ ) или перпендикуляръ ( $BD$ ), опущенный изъ конца дуги на вертикальный діаметръ.

<sup>1)</sup> Здѣсь имѣется въ виду четверть окружности.

<sup>2)</sup> Точнѣе: проекція подвижного радіуса на вертикальный діаметръ.



3. Отрѣзокъ первой касательной отъ точки касанія до продолженія подвижнаго радіуса ( $AE$ ).

4. Отрѣзокъ второй касательной отъ точки касанія до продолженія подвижнаго радіуса ( $A_1F$ ).

5. Отрѣзокъ отъ центра до точки пересѣченія первой касательной съ продолженнымъ подвижнымъ радіусомъ ( $OE$ ). [Сокращенно будемъ говорить: первый отрѣзокъ сѣкущей].

6. Отрѣзокъ отъ центра до точки пересѣченія второй касательной съ продолженнымъ подвижнымъ радіусомъ ( $OF$ ). [Сокращенно будемъ говорить: второй отрѣзокъ сѣкущей].

15. Для каждой тригонометрической линіи возможны два противоположныхъ направленія относительно своего начала.

Началомъ для проекціи подвижнаго радіуса и отрѣзковъ сѣкущей служить центръ круга, для касательныхъ — точки касанія<sup>1)</sup>.

Проекціи подвижнаго радіуса и отрѣзки касательныхъ берутся на линіяхъ, имѣющихъ опредѣленное положеніе въ кругѣ, отрѣзки сѣкущей — на линіи, которая вращается вмѣстѣ съ содержащимся въ ней подвижнымъ радіусомъ (при этомъ отрѣзокъ сѣкущей бываетъ направленъ или въ сторону подвижнаго радіуса или обратно ему).

---

<sup>1)</sup> Относительно перпендикуляровъ  $BC$  и  $BD$  будетъ разъяснено въ § 16.

## II. Тригонометрическія функціи. Ихъ измѣненія и взаимная зависимость.

16. **Общее опредѣленіе тригонометрическихъ функцій.** Тригонометрическими функціями угла или дуги называются количества (отвлеченныя, положительныя и отрицательныя), выражающія направление и отношеніе къ радиусу тригонометрическихъ линій<sup>1)</sup>. Разъяснимъ отдѣльныя части этого опредѣленія.

1) Въ § 15 было замѣчено, что каждой тригонометрической линіи свойственны два противоположныхъ направленія. Выборъ направленія можно указать знакомъ при числѣ, выражающемъ длину, а именно: условимся изъ двухъ линій, измѣряемыхъ въ обѣ стороны отъ общаго начала, одну выражать положительнымъ числомъ, а другую отрицательнымъ<sup>2)</sup>. Отсюда происходятъ знаки тригонометрическихъ функцій<sup>3)</sup>.

Въ тригонометрическихъ линіяхъ положительными считаютъ тѣ направленія, какія онѣ имѣютъ для первой четверти, т.-е. въ вертикальныхъ линіяхъ направленіе вверхъ отъ начала, въ горизонтальныхъ линіяхъ вправо отъ начала, а въ отрезкахъ спускающейся направленіе съ одну сторону съ подвижнымъ радиусомъ (отъ центра къ концу дуги).

Что касается перпендикуляровъ  $BC$  и  $BD$ , то они служатъ для замѣны проекцій  $OD$  и  $OC^*$ ), а потому ихъ выражаютъ тѣми же числами, какъ соответствующія проекціи.

---

<sup>1)</sup> Или иначе: тригонометрическая функція угла или дуги есть отношеніе тригонометрической линіи къ радиусу, взятое со знакомъ, выражающимъ направление тригонометрической линіи.

<sup>2)</sup> Это условіе (принципъ Декарта) уже было примѣнено ранѣе въ угламъ и дугамъ (§ 8)

<sup>3)</sup> Т.-е. знаки чиселъ, служащихъ значеніями тригонометрическихъ функцій.

<sup>\*</sup>) Чтобы можно было обѣ проекціи соединить въ одномъ треугольникѣ.

2) Будемъ для каждой тригонометрической линіи находить отношеніе къ радіусу: въ результатѣ получимъ шесть отвлеченныхъ чиселъ. Такъ какъ всѣ тригонометрическія линіи сравниваются съ радіусомъ<sup>1)</sup>, то онѣ служатъ на тригонометрическомъ кругѣ какъ бы мѣрою длины, и потому полученныя отношенія можно разсматривать какъ выраженія длины и присоединять къ нимъ знаки — согласно сказанному въ п. 1.

3) Итакъ каждому углу будутъ соответствовать шесть особыхъ количествъ. Докажемъ, что эти количества *не зависятъ отъ длины радіуса*.

Дѣйствительно, измѣнимъ радіусъ, оставляя тотъ же уголъ: направленія тригонометрическихъ линіи, очевидно, не измѣнятся, слѣдовательно знаки количествъ сохранятся; далѣе, новая фигура будетъ *подобна* первой, а такъ какъ въ подобныхъ фигурахъ взаимное отношеніе соответственныхъ линій одинаково, то отношенія тригонометрическихъ линій къ радіусу будутъ имѣть такую же величину, что и въ первый разъ. Такимъ образомъ, несмотря на измѣненіе радіуса, въ упомянутыхъ количествахъ сохранятся и знаки и абсолютныя величины, т.-е. эти количества не измѣнятся<sup>2)</sup>; по они, очевидно, измѣнятся, если взять новый уголъ.

Итакъ отношенія тригонометрическихъ линій къ радіусу, взятые со знаками направленія, суть дѣйствительно *функции угла*, такъ какъ мѣняются вмѣстѣ съ угломъ и не зависятъ отъ длины радіуса.

4) Изъ §§ 6 и 8 видно, что уголъ и дуга могутъ выражаться однимъ и тѣмъ же числомъ; поэтому *тригонометрическія функции угловъ* суть также и *тригонометрическія функции дугъ*, понимая подъ словомъ «дуга» число, выражающее дугу въ доляхъ окружности или въ доляхъ радіуса. Такимъ образомъ за аргументъ тригонометрической функции можно безразлично принимать уголъ и дугу, чѣмъ мы и будемъ пользоваться въ дальнѣйшихъ выводахъ.

**17. Названія и обозначенія.** Каждая изъ тригонометрическихъ функций имѣетъ особое названіе и обозначеніе: они помѣщены въ прилагаемой ниже таблицѣ — по порядку тригонометрическихъ линій въ § 14. [Въ этой таблицѣ подстрочныя цифры при  $\alpha$  указываютъ, въ какомъ квадрантѣ оканчивается уголъ; обозначенія  $R$ ,  $BC$ ,  $OE$  и т. д. имѣютъ тотъ же смыслъ, что и въ геометріи,

<sup>1)</sup> А также и дуги — при линейномъ измѣреніи.

<sup>2)</sup> Для отдѣльныхъ случаевъ доказательство можно вести подробно (см. § 19).

т.-е. означают длину радиуса, перпендикуляра, первого отрезка сѣкущей и т. д., разсматриваемую непосредственно, или число, выражающее длину<sup>1)</sup>].

№	Названія.	Обозначенія.	Примѣры (см. черт. § 14).
1	синусъ	sn	$\text{sn } \alpha_I = \frac{OD}{R}; \text{sn } \alpha_{IV} = -\frac{BC}{R}$
2	косинусъ	cs	$\text{cs } \alpha_{II} = -\frac{OC}{R}; \text{cs } \alpha_{IV} = \frac{BD}{R}$
3	тангенсъ	tg	$\text{tg } \alpha_{III} = \frac{AE}{R}; \text{tg } \alpha_{IV} = -\frac{AE}{R}$
4	котангенсъ	ctg	$\text{ctg } \alpha_I = \frac{A_1F}{R}; \text{ctg } \alpha_{II} = -\frac{A_1F}{R}$
5	секансъ	sc	$\text{sc } \alpha_{III} = -\frac{OE}{R}; \text{sc } \alpha_{IV} = \frac{OE}{R}$
6	косекансъ	csc	$\text{csc } \alpha_{II} = \frac{OF}{R}; \text{csc } \alpha_{III} = -\frac{OF}{R}$

Предоставляемъ самому учащемуся составить словесное опредѣленіе для каждой тригонометрической функціи<sup>2)</sup>.

*Замѣчаніе.* Въмѣсто «тригонометрическія функціи» для краткости часто будемъ говорить просто «функціи».

**18.** Изложенное выше пояснимъ еще числовыми примѣрами.

1. Уголъ  $\alpha$  оканчивается въ III четверти; первый отрезокъ сѣкущей въ 5 разъ длиннѣе радиуса; требуется вычислить тригонометрическую функцію. Соответствующая функція, секансъ, будетъ отрицательна<sup>3)</sup>, такъ какъ данный отрезокъ сѣкущей и подвижной радиусъ лежатъ по разнымъ сторонамъ центра; отношеніе отрезка къ радиусу равно 5. Такимъ образомъ  $\text{sc } \alpha = -5$ .

2. Уголъ  $\beta$  оканчивается во II четверти; при радиусъ равномъ 3 вершк. второй отрезокъ сѣкущей содержитъ 5 вершк.; требуется вычислить тригонометрическую функцію. Эта функція, косекансъ,

<sup>1)</sup> Это число, конечно, абсолютное.

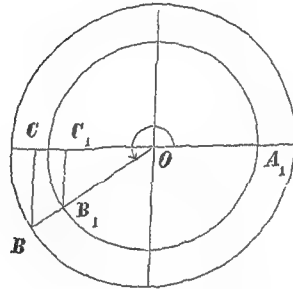
<sup>2)</sup> Напримѣръ: тангенсомъ угла или дуги называется положительное или отрицательное количество, выражающее направление и отношеніе къ радиусу отрезка первой касательной; и т. п.

<sup>3)</sup> Точнѣе: будетъ имѣть отрицательное значеніе.

будет положительна, такъ какъ данный отрѣзокъ сѣкущей идетъ (изъ центра) въ одну сторону съ подвижнымъ радіусомъ; отноше-  
 ние этого отрѣзка къ радіусу равно  $\frac{5}{3}$ . Итакъ  $\csc \beta = \frac{5}{3}$ .

3. Уголъ  $\gamma$  оканчивается въ IV четверти; при радіусѣ равномъ 10 дюйм. отрѣзокъ второй касательной содержитъ 1 футъ 2 дюйма, вычислить тригонометрическую функцию. Эта функция, котангенсъ, будетъ отрицательна, такъ какъ данный отрѣзокъ направленъ влево отъ точки касанія; его отношение къ радіусу равно 1,4. Итакъ  $\operatorname{ctg} \gamma = -1,4$ .

19. Замѣчаніе. Въ § 16 п. 3 было поставлено на видѣ, что тригонометрическія функции не зависятъ отъ длины радіуса, и эта теорема была доказана лишь въ общихъ чертахъ. Для частныхъ случаевъ доказательство можно дать нагляднѣе.



Черт. 7.

Возьмемъ для примѣра синусъ угла III четверти ( $A_1OB_1 = AOB = \alpha$ ).

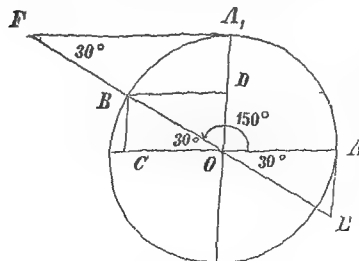
По чертежу 7 имѣемъ:

$$\sin \alpha = -\frac{BC}{R} \quad \text{и} \quad \sin_1 \alpha = -\frac{B_1C_1}{R_1}.$$

Но изъ подобія тр-ковъ  $OB_1C_1$  и  $OBC$  слѣдуетъ, что  $\frac{B_1C_1}{R_1} = \frac{BC}{R}$ ;

$$\text{отсюда: } -\frac{B_1C_1}{R_1} = -\frac{BC}{R} \quad \text{или} \quad \sin_1 \alpha = \sin \alpha.$$

20. Примѣры вычисленія тригонометрическихъ функций по данному углу. Не касаясь пока общаго вопроса, укажемъ, какъ для нѣ-



Черт. 8.

которыхъ угловъ можно вычислить тригонометрическія функции, примѣняя только ихъ опредѣленія, данныя въ § 17, и тѣ формулы, которыя сообщаются въ курсѣ геометріи.

Для примѣра возьмемъ уголъ  $150^\circ$  (или  $\frac{5}{6}\pi$ ).

Отложимъ его отъ общаго начала угловъ въ тригонометрическомъ кругѣ (длину радіуса можно брать какую угодно, такъ какъ

она не вліяєть на тригонометрическія функціи); построи́мъ тригонометрическія лінії, съ помощью ихъ вырази́мъ функціи и вычисли́мъ полученныя отноше́нія.

$$1) \sin 150^\circ = \frac{BC}{R} = \frac{1}{2}$$

$$2) \cos 150^\circ = -\frac{OC^*)}{R} \\ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3) \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{AE}{R} \\ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$4) \operatorname{ctg} 150^\circ = -\frac{A_1F}{R} \\ = -\sqrt{3}$$

$$5) \sec 150^\circ = -\frac{OE}{R} \\ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$6) \operatorname{csc} 150^\circ = \frac{OF}{R} = 2$$

$BC = \frac{1}{2}$  стороны правильного вписаннаго шестиугольника  $= \frac{R}{2}$ .

$OC$  = аподемъ правильнаго вписаннаго шестиугольника  $= \frac{1}{2}$  стороны правильнаго вписаннаго треугольника  $(BD) = R \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Треугольникъ  $AOE$  половина равносторонняго; въ полномъ треугольникѣ линия  $OA$  была бы высотой, а линия  $AE$  половиной основанія; поэтому  $R = AE \cdot \sqrt{3}^{**}$ . (Можно  $AE$  разсматривать еще какъ половину стороны правильнаго описаннаго шестиугольника).

Подобно предыдущему получимъ  $A_1F = R \sqrt{3}$ . (Можно также разсматривать  $A_1F$  какъ половину стороны прав. опис. треугольника).

Разсматривая  $OE$  какъ сторону равносторонняго треугольника, найдемъ  $R = \frac{OE}{2} \cdot \sqrt{3}$

Разсматривая тр-къ  $A_1FO$  какъ половину равносторонняго, получимъ  $OF = 2R$ .

Вообще, если подвижной радиусъ отклоненъ отъ главныхъ диаметровъ на  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , то вычисленіе тригонометрическихъ

\*) Какъ и въ § 17, здѣсь черезъ  $R, OC, AE$  и т. д. означена *длина*.

\*\*) Въ равностороннемъ треугольникѣ высота равна половинѣ основанія, умноженной на  $\sqrt{3}$

функцій связано съ правильными вписанными и описанными треугольниками и шестиугольниками и со свойствами равносторонняго треугольника.

Если подвижной радіусъ проходитъ посрединѣ четверти, то примѣняются формулы, относящіяся къ вписанному и описанному квадратамъ. Для такихъ угловъ функціи сходнаго названія ( $\text{sn}$  и  $\text{cs}$ ,  $\text{tg}$  и  $\text{ctg}$ ,  $\text{sc}$  и  $\text{csc}$ ) имѣють одинаковую абсолютную величину.

**21.** Полезно запомнить слѣдующія функціи:

$$\text{sn } 30^\circ = \frac{1}{2} = \text{cs } 60^\circ$$

$$\text{cs } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sn } 60^\circ$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{ctg } 60^\circ$$

$$\text{ctg } 30^\circ = \sqrt{3} = \text{tg } 60^\circ$$

$$\text{sn } 45^\circ = \text{cs } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \text{ctg } 45^\circ = 1$$

Зная, какъ выражаются (по радіусу) стороны правильныхъ вписанныхъ восьмиугольника, десятиугольника и двѣнадцатиугольника, пайдемъ:

$$\text{sn } 22^\circ 30' = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad \text{sn } 18^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1);$$

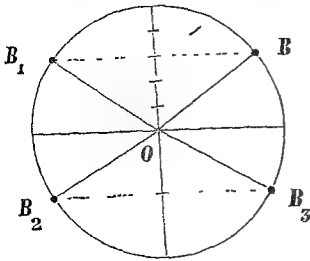
$$\text{sn } 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

**22. Построеніе подвижнаго радіуса по данной тригонометрической функціи.** Задача состоитъ въ томъ, что дано значеніе какой-либо одной тригонометрической функціи и требуется найти соответствующее положеніе подвижнаго радіуса на тригонометрическомъ кругѣ.

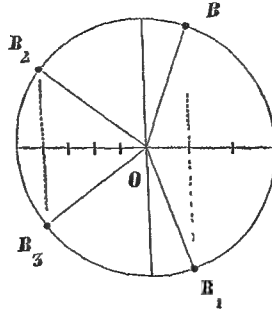
Рѣшеніе сводится къ слѣдующему: для круга можно взять какой угодно радіусъ, такъ какъ тригонометрическія функціи не связаны съ длиною радіуса; описавъ кругъ, строимъ тригонометрическую линію, для чего сообразуемся со знакомъ и абсолютной величиной даннаго значенія функціи; наконецъ переходимъ съ тригонометрической линіи на подвижной радіусъ. Разберемъ теперь отдѣльные случаи.

1 и 2) Положимъ  $\text{sn } \alpha = \frac{3}{5}$ . Синусу соответствуетъ вертикальная проекція подвижнаго радіуса; такъ какъ данный синусъ

положителенъ, то проекція направлена вверхъ отъ центра; по длинѣ она составляетъ  $\frac{3}{5}$  радіуса. Построивъ вертикальную проекцію, изъ конца ея возставаемъ перпендикуляръ до пересѣченія съ окружностью и въ полученную точку проводимъ радіусъ; такъ какъ не указано, въ какую сторону долженъ идти перпендикуляръ, то задача допускаетъ два рѣшенія:  $OB$  и  $OB_1$  (черт. 9).



Черт. 9.



Черт. 10

Если данъ косинусъ, то соображенія и построеніе подобны изложеннымъ <sup>1)</sup>.

Чертежъ 9-й содержитъ построенія для случаевъ:  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ ; чертежъ 10-й — для случаевъ:  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  и  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

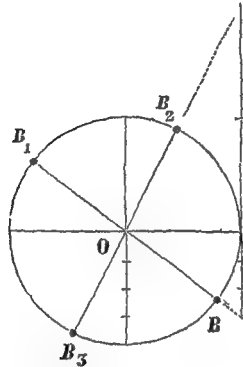
3 и 4) Пусть будетъ  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ . Тангенсу соответствуетъ отръзокъ первой касательной; въ данномъ случаѣ для полученія этого отръзка надо отложить внизъ отъ точки касанія часть равную  $\frac{3}{4}$  радіуса. Конецъ отръзка долженъ приходиться на продолженіи

<sup>1)</sup> Возможенъ еще слѣдующій приѣмъ. Изъ условія  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  заключаемъ, что соответствующая точка окружности должна находиться выше горизонтальнаго діаметра и отстоять отъ него на  $\frac{3}{5}$  радіуса. Такихъ точекъ двѣ: онѣ получатся на одной параллели къ горизонтальному діаметру.

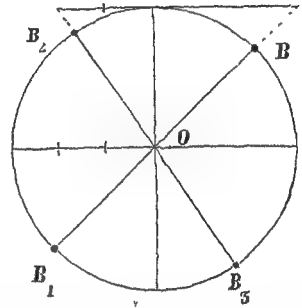
Въ случаѣ косинуса надо проводить параллель къ вертикальному діаметру.



подвижного радиуса, при чемъ не указано, должно ли это быть продолженіе за конецъ дуги или за центръ (впередъ или назадъ); такимъ образомъ задача допускаетъ два рѣшенія; мы получимъ ихъ, проводя изъ конца касательной сѣкущую черезъ центръ:  $OB$  и  $OB_1$  (черт. 11) суть искомыя положенія подвижного радиуса  $OB$  продолжается впередъ,  $OB_1$  назадъ).



Черт. 11.



Черт. 12.

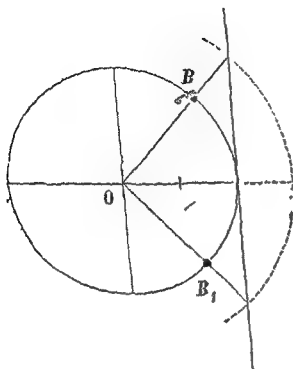
Такое же разсужденіе примѣнимо и къ построенію подвижного радиуса по данному котангенсу.

Черт. 11-й содержитъ построенія для случаевъ:  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

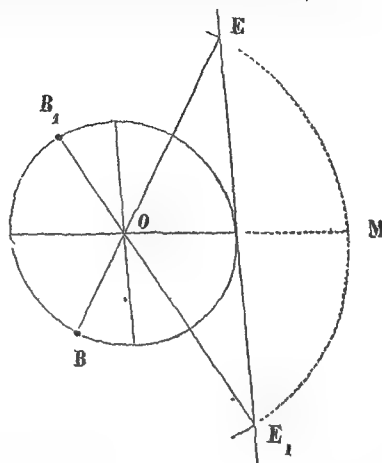
и  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ ; черт. 12-й — для случаевъ:  $\operatorname{ctg} \alpha = 1$  и  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2}{3}$ .

5 и 6) Положимъ  $\operatorname{sc} \alpha = -2$ . Секансу соответствуетъ первый отръзокъ сѣкущей; сначала отмѣримъ этотъ отръзокъ, удерживая то же самое начало (т.-е. центръ): для этого продолжимъ напр. горизонтальный діаметръ и отложимъ отъ центра часть  $OM = 2R$  (черт. 14); теперь повернемъ новую линію около центра такъ, чтобы ея конецъ пришелъ на первую касательную: получимъ два положенія тригонометрической линіи,  $OE$  и  $OE_1$ , которыя оба равно возможны. Чтобы перейти на подвижной радиусъ, обратимъ вниманіе на то, что данный секансъ отрицателенъ: это значитъ, что подвижной радиусъ и отръзокъ сѣкущей должны быть направлены въ разныя стороны отъ центра; поэтому  $OE$  и  $OE_1$  продолжимъ за центръ до пересѣченія съ окружностью: искомыя положенія подвижного радиуса будутъ  $OB$  и  $OB_1$ .

Если данный секанс положителен, то подвижной радиусъ слѣдуетъ взять на самой тригонометрической линіи (черт. 13).

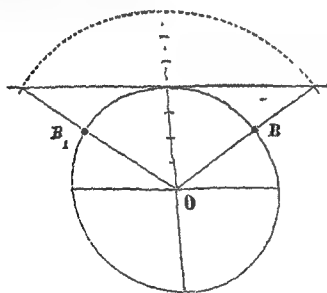


Черт. 13.  $\left( \sec \alpha = \frac{3}{2} \right)$ .

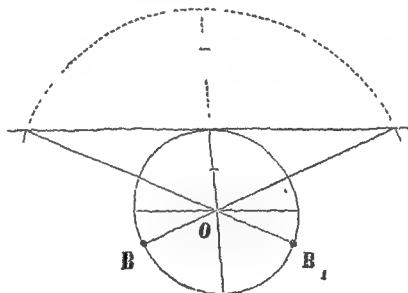


Черт. 14.  $(\sec \alpha = -2)$ .

Подобнымъ же образомъ поступаемъ и въ случаѣ косеканса (черт. 15 и 16).



Черт. 15.  $\left( \csc \alpha = \frac{7}{4} \right)$ .



Черт. 16.  $(\csc \alpha = -2,5)$ .

**23. Замѣчаніе I.** Изъ предыдущаго видно, что значеніе тригонометрической функціи, взятое *отдѣльно* (безъ какого-либо еще условія), даетъ вообще два положенія подвижнаго радиуса (двѣ точки на окружности)\*). Эти положенія въ случаѣ синуса и косо-

\*) Исключеніемъ служатъ тѣ значенія, при которыхъ подвижной радиусъ получается на главномъ діаметрѣ.

канса симметричны относительно вертикальнаго діамстра, въ случаѣ косинуса и секанса симметричны относительно горизонтальнаго діамстра, въ случаѣ тангенса и котангенса составляютъ одну прямую линию.

*Замѣчаніе II.* Разсмотрѣнные построенія показываютъ также, какія значенія возможны для каждой функціи, а именно: для синуса и косинуса отъ  $-1$  до  $+1$ ; для тангенса и котангенса отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ ; для секанса и косеканса отъ  $-\infty$  до  $-1$  и отъ  $+1$  до  $+\infty$ .

**24. Измѣненія тригонометрическихъ функцій съ измѣненіемъ аргумента.** Предположимъ, что аргументъ <sup>1)</sup> постепенно измѣняется отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ , и рассмотримъ соответствующій *ходъ* <sup>2)</sup> каждой функціи.

Каждому значенію аргумента соответствуетъ опредѣленное положеніе подвижнаго радіуса, вслѣдствіе чего предположенный выше ходъ аргумента равносильнъ непрерывному перемѣщенію подвижнаго радіуса въ положительномъ направленіи.

Но всѣ возможные положенія подвижнаго радіуса исчерпываются въ теченіе одного полнаго оборота; при дальнѣйшемъ же вращеніи они будутъ повторяться, а отсюда произойдутъ повторенія и въ ходѣ каждой функціи <sup>3)</sup>.

Поэтому сперва изслѣдуемъ, какъ измѣняются тригонометрическія функціи при одномъ полномъ оборотѣ подвижнаго радіуса (напр. при измѣненіи угла отъ  $0$  до  $360^\circ$ ); послѣ этого опредѣлимъ, чѣмъ отличается ходъ каждой функціи, если его разсматривать въ *цѣломъ*.

**25. Измѣненіе тригонометрическихъ функцій при возрастаніи угла отъ  $0$  до  $360^\circ$ .** Воспользуемся чертѣжами § 14, а именно: представляя себѣ положительное вѣщеніе подвижнаго радіуса, будемъ слѣдить за перемѣнами въ направленіи и длинѣ тригонометрическихъ линій, а отсюда заключать съ измѣненіи тригонометрическихъ функцій.

<sup>1)</sup> Т.-е. уголъ или дуга.

<sup>2)</sup> Т.-е. смѣну значеній.

<sup>3)</sup> Напомнимъ, что тригонометрическія линіи строятся по данному положенію подвижнаго радіуса.

Результаты приведены въ прилагаемой таблицѣ: для каждой четверти въ аргументѣ и функціяхъ показаны только крайнія значенія; между ними функція или *только* увеличивается или *только* уменьшается.

Уголъ.	I 0 .... 90° (0 .... $\frac{1}{2}\pi$ )	II 90°.... 180° ( $\frac{1}{2}\pi$ .... $\pi$ )	III 180°.... 270° ( $\pi$ .... $\frac{3}{2}\pi$ )	IV 270°.... 360° ( $\frac{3}{2}\pi$ ... 2 $\pi$ )
Синусъ	0 .... 1	1 .... 0	0 .. -1	-1 .... 0
Косинусъ	1 .... 0	0 .. -1	-1 .... 0	0 .... 1
Тангенсъ	0 .... $\infty$	$-\infty$ .. 0	0 .... $\infty$	$-\infty$ ... 0
Котангенсъ	$\infty$ .... 0	0 .. $-\infty$	$\infty$ .... 0	0 .. $-\infty$
Секансъ	1 .... $\infty$	$-\infty$ .. -1	-1 .. $-\infty$	$\infty$ .... 1
Косекансъ	$\infty$ .... 1	1 .... $\infty$	$-\infty$ .. -1	-1 .. $-\infty$

26\*. Значенія функцій для кнѣзовъ четверти требуютъ особой оговорки, такъ какъ ихъ нельзя получить прямо изъ опредѣленій, данныхъ въ §§ 16 и 14\*).

Эти значенія получены, примѣняя слѣдующій общій принципъ: если для даннаго значенія аргумента нельзя получить значеніе функціи прямо по опредѣленію, то отыскиваютъ предѣлъ, къ которому стремятся функція, если аргументъ неопредѣленно приближается къ данному члѣнному значенію; этотъ предѣлъ и принимаютъ за искомое значеніе функціи.

Такъ, чтобы найти  $\sin 90^\circ$ , надо начать съ угла, который немного болѣе или немного менѣе  $90^\circ$ , и приближая уголъ къ  $90^\circ$ , опредѣлить, къ какому предѣлу стремится при этомъ косинусъ; вступая такъ, получимъ  $\sin 90^\circ = +0$ , если мы начали съ угла I четверти, и  $\sin 90^\circ = -0$ , если мы начали съ угла II четверти. Такъ какъ  $+0 = -0$ , то знакъ опускаютъ и пишутъ  $\sin 90^\circ = 0$ .

\*) Напримѣръ, чтобы получить тангенсъ, надо сперва найти отрѣзокъ первой касательной; но въ случаѣ угла  $90^\circ$  такого отрѣзка не существуетъ, такъ какъ подвижной радіусъ и касательная параллельны.

Возьмемъ еще  $\operatorname{tg} 90^\circ$ . Поступая подобно предыдущему, найдемъ, что если уголъ неопредѣленно приближается къ  $90^\circ$ , то абсолютная величина тангенса неопредѣленно возрастаетъ, при чемъ получимъ  $+\infty$ , если  $90^\circ$  служить предѣломъ возрастающаго острого угла, и  $-\infty$ , если  $90^\circ$  служить предѣломъ убывающаго тупого угла. Въ этомъ смыслѣ и пишутъ  $\operatorname{tg} 90^\circ = \pm \infty$  \*).

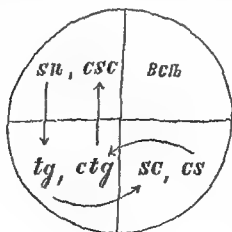
27. Для наглядности приводимъ еще въ отдѣльной таблицѣ знаки функцій въ каждой четверти.

Четв.	sn	cs	tg	ctg	sc	csc
I	+	+	+	+	+	+
II	+	—	—	—	—	+
III	—	—	+	+	—	—
IV	—	+	—	—	+	—**)

28. 1. Изъ таблицы § 25 видно, какія значенія способна принимать каждая функція, а именно: синусъ и косинусъ отъ  $-1$  до  $+1$ , тангенсъ и котангенсъ отъ  $-\infty$  до  $+\infty$  (т.-е. всякое значеніе), секансъ и косекансъ отъ  $-\infty$  до  $-1$  и отъ  $+1$  до  $+\infty$  (ср. § 23).

2. Относительно абсолютной величины функцій замѣчаемъ слѣдующее:

\*) Что касается  $\operatorname{ctg} 0$ ,  $\operatorname{csc} 0$ ,  $\operatorname{ctg} 360^\circ$  и  $\operatorname{csc} 360^\circ$ , то и они получаютъ двойной знакъ, если измѣненіе угла отъ 0 до  $360^\circ$  не будемъ выдѣлять изъ общаго хода аргумента:  $\dots -90^\circ \dots 0 \dots 90^\circ \dots 180^\circ \dots 270^\circ \dots 360^\circ \dots 450^\circ \dots$



Черт. 17.

\*\*) Такимъ образомъ въ I четверти всѣ функции положительны, а въ каждой изъ остальныхъ четвертей двѣ функции положительны и чегыре отрицательны.

Какія функции въ какой четверти положительны, легко запомнить по черт. 17, если надписывать функции въ томъ порядкѣ, какой указанъ стрѣлками.

а) абсолютная величина синуса и косинуса не превышает единицы; тангенсы и котангенсы могут иметь какую угодно абсолютную величину; абсолютная величина секанса и косеканса не может быть меньше единицы.

б) въ I и III четвертяхъ абсолютная величина синуса, тангенса и секанса возрастаетъ, а прочихъ — убываетъ; во II и IV четвертяхъ наоборотъ<sup>1)</sup>.

3. Каждая функція исчерпываетъ всё свои значенія на протяжении двухъ четвертей<sup>2)</sup>, а абсолютная величина функціи — на протяжении одной четверти (напр. первой).

**29\*. Периодичность тригонометрическихъ функцій.** Въ § 24 показано, что ходъ каждой тригонометрической функціи можно разложить на одинаковыя части, соответствующія одному обороту подвижного радіуса. Но, разсматривая таблицу § 25, замѣчаемъ, что въ случаѣ тангенса и котангенса ходъ функціи, соответствующій одному обороту, въ свою очередь состоитъ изъ двухъ одинаковыхъ частей, соответствующихъ каждая одному полуобороту: при возрастаніи угла отъ  $180^\circ$  до  $360^\circ$  тангенсы и котангенсы измѣняются такъ же, какъ и при возрастаніи угла отъ 0 до  $180^\circ$ <sup>3)</sup>.

Такимъ образомъ, окончательно, ходъ тангенса и котангенса складывается изъ повтореній той части его, которая соответствуетъ измѣненію аргумента отъ 0 до  $180^\circ$ . Что касается синуса, косинуса, секанса и косеканса, то при одномъ оборотѣ въ ихъ ходѣ повтореній нѣтъ, такъ что для нихъ сдѣланное раньше заключеніе остается окончательнымъ.

Свойство функціи повторять свой *ходъ* черезъ равные промежутки въ аргументѣ, называется *периодичностью*, а *наименьшій*

<sup>1)</sup> Это легко запомнить въ такой формѣ: *возрастаютъ* (по абсолютной величинѣ, съ возрастаніемъ угла) въ нечетныхъ четвертяхъ нечетные нумера функцій, а въ четныхъ — четные (см. табл. § 17).

<sup>2)</sup> Таковы: для  $\cos$ ,  $\lg$ ,  $\operatorname{ctg}$  и  $\sec$  I и II четверть, для  $\sin$  и  $\operatorname{csc}$  II и III четверть.

<sup>3)</sup> Углы  $\alpha$  и  $\alpha + 180^\circ$  имѣютъ общій отрѣзокъ первой касательной какъ какъ ихъ подвижные радіусы составляютъ одну прямую); слѣдоват. тангенсы этихъ угловъ равны. Подобное же вѣрно и для котангенсовъ. Отсюда слѣдуетъ, что напр. при углахъ:  $180^\circ$ ,  $180^\circ 1''$ ,  $180^\circ 2''$ ,  $180^\circ 3''$  и т. д. тангенсы и котангенсы имѣютъ тѣ же самыя значенія, какъ и при углахъ: 0,  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  и т. д.

изъ такихъ промежутковъ<sup>1)</sup> называется *периодомъ* функціи. Такимъ образомъ тригонометрическія функціи суть періодическія; періодъ тангенса и котангенса есть  $180^\circ$ ; періодъ синуса, косинуса, секанса, и косеканса есть  $360^\circ$ .

**30.** Возьмемъ *какое угодно* значеніе аргумента и соответствующее ему значеніе періодической функціи. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что прибавляя къ аргументу нѣсколько періодовъ или вычитая, получимъ значеніе функціи равное первоначальному. И наоборотъ, если существуетъ такое *опредѣленное* количество, которое можно прибавить ко *всякому* значенію аргумента, не измѣняя тѣмъ значенія функціи, то можно показать, что эта функція періодическая<sup>2)</sup>.

**31.** Періодичность тригонометрическихъ функцій можно выразить слѣдующими формулами:

$$\begin{array}{ll} 1) \operatorname{sn} \alpha = \operatorname{sn} (\alpha + 360^\circ \cdot n) & 2) \operatorname{cs} \alpha = \operatorname{cs} (\alpha + 360^\circ \cdot n) \\ 3) \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + 180^\circ \cdot n) & 4) \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + 180^\circ \cdot n) \\ 5) \operatorname{sc} \alpha = \operatorname{sc} (\alpha + 360^\circ \cdot n) & 6) \operatorname{csc} \alpha = \operatorname{csc} (\alpha + 360^\circ \cdot n) \end{array}$$

въ которыхъ  $\alpha$  можно придать *какое угодно* значеніе, а  $n$  есть неопредѣленное цѣлое число (положительное или отрицательное).

Если дуга выражена въ доляхъ радіуса, то напомнимъ:

$$\operatorname{sn} a = \operatorname{sn} (a + 2\pi \cdot n), \quad \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} (a + \pi \cdot n) \quad \text{и т. д.}$$

<sup>1)</sup> Промежутки могутъ быть различной величины: напр., если синусъ повторяетъ свой ходъ по истеченіи каждаго  $360^\circ$ , то и по истеченіи каждаго  $720^\circ$ ,  $1080^\circ$  и т. д. онъ повторяетъ тотъ ходъ, какой соответствуетъ  $720^\circ$ ,  $1080^\circ$  и т. д.

<sup>2)</sup> При этомъ упомянутое постоянное количество есть или періодъ или кратное періода.

Для поясненія приведемъ примѣръ изъ алгебры. Возьмемъ  $y = i^x$ , означая черезъ  $i$  мнимую единицу и черезъ  $x$  переменное *цѣлое* число. Если къ аргументу  $x$  прибавить 4, то  $y$  не измѣнится, такъ какъ это равносильно умноженію на  $i^4$ , что равно 1. Ходъ аргумента и функціи представляется въ слѣдующемъ видѣ:

$y$	...	1	$i$	-1	$-i$	1	$i$	-1	$-i$	1	$i$	...
$x$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...

Такимъ образомъ имѣемъ періодическое измѣненіе функціи съ періодомъ 4.

**32\*.** Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Между тригонометрическими функциями одного и того же угла существует зависимость, которую можно выразить следующими пятью формулами:

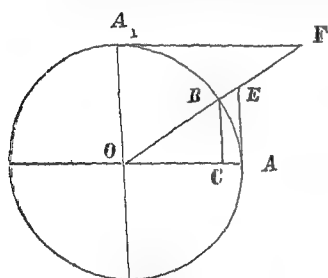
$$\overset{C}{\text{sn}}^2 \alpha + \text{cs}^2 \alpha = 1^*) \quad (\text{I}); \quad \text{tg } \alpha = \frac{\text{sn } \alpha}{\text{cs } \alpha} \quad (\text{II}); \quad \text{ctg } \alpha = \frac{\text{cs } \alpha}{\text{sn } \alpha} \quad (\text{III});$$

$$\text{sc } \alpha \cdot \text{cs } \alpha = 1 \quad (\text{IV}); \quad \text{csc } \alpha \cdot \overset{C}{\text{sn}} \alpha = 1 \quad (\text{V}).$$

Эти формулы справедливы при *снхх* значеніях  $\alpha$ .

Мы докажемъ ихъ сполна для угловъ первой четверти и объяснимъ, въ чемъ отличается ихъ выводъ для другихъ четвертей.

**33\*.** Возьмемъ конецъ угла  $\alpha$  въ первой четверти.



Черт. 18.

а) Изъ прямоугольнаго тр-ка  $OBC$  имѣемъ  $BC^2 + OC^2 = OB^2$ .

Раздѣливъ обѣ части на  $R^2$ , получимъ  $\left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = \left(\frac{OB}{R}\right)^2$  или  $\text{sn}^2 \alpha + \text{cs}^2 \alpha = 1$ .

б) Остальныя формулы выводятся изъ подобія тр-ковъ, которые содержатъ линіи, соответствующія функциямъ.

Такъ для формулы II беремъ тр-ки  $OEA$  и  $OBC$ . Изъ ихъ подобія слѣдуетъ:  $\frac{AE}{OA} = \frac{BC}{OC}$ ; раздѣливъ оба члена второго отноше-

нія на  $R$ , получимъ:  $\frac{AE}{OA} = \frac{BC}{R} / \frac{OC}{R}$  или  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sn } \alpha}{\text{cs } \alpha}$ .

в) Тр-къ  $FOA_1$  подобенъ  $OBC$ , слѣдоват.  $\frac{A_1F}{OA_1} = \frac{OC}{BC}$ ; отсюда  $\frac{A_1E}{OA_1} = \frac{OC}{R} / \frac{BC}{R}$  или  $\text{ctg } \alpha = \frac{\text{cs } \alpha}{\text{sn } \alpha}$ .

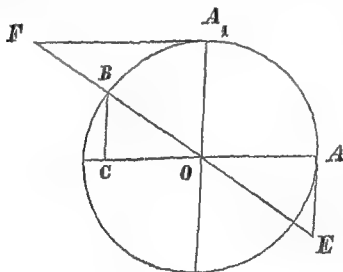
д) Подобіе тр-ковъ  $OEA$  и  $OBC$  даетъ:  $\frac{OE}{OA} = \frac{OB}{OC}$ ; отсюда  $\frac{OE}{OA} = \frac{OB}{R} / \frac{OC}{R}$ , т.-е.  $\text{sc } \alpha = \frac{1}{\text{cs } \alpha}$  или  $\text{sc } \alpha \cdot \text{cs } \alpha = 1$ .

е) Тѣмъ же способомъ—изъ подобія тр-ковъ  $FOA_1$  и  $OBC$ —получимъ,  $\text{csc } \alpha \cdot \text{sn } \alpha = 1$ .

\*)  $\text{sn}^2 \alpha$  пишется вмѣсто  $(\text{sn } \alpha)^2$ .



**34\*.** Если угол  $\alpha$  оканчивается не в первой четверти, то выводъ отступаетъ отъ предыдущаго только тамъ, гдѣ встрѣчаются отрицательныя значенія функций: тогда отношеніе тригонометрической линіи къ радіусу замѣнится не самой функцией, но функцией взятой со знакомъ *минусъ*. Чтобы пояснить сказанное, выведемъ формулы I, III и IV для угла второй четверти.



Черт. 19.

а) Изъ прямоугольнаго тр-ка  $OBC$  имѣемъ:

$$BC^2 + OC^2 = OB^2, \text{ откуда } \left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = \left(\frac{OB}{R}\right)^2.$$

Теперь замѣтимъ, что  $\frac{BC}{R} = \sin \alpha$ ,

какъ и прежде, но  $\frac{OC}{R} = -\cos \alpha$ ,

потому что въ настоящемъ случаѣ  $\cos \alpha = -\frac{OC}{R}$ ;  $\frac{OB}{R} = 1$ . Такимъ образомъ  $\sin^2 \alpha + (-\cos \alpha)^2 = 1$ , откуда  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

б)  $\triangle FOA_1 \sim OBC$ , слѣд.  $\frac{A_1F}{OA_1} = \frac{OC}{BC}$ ; отсюда  $\frac{A_1F}{OA_1} = \frac{OC}{R} / \frac{BC}{R}$ ;  
но  $\frac{A_1F}{OA_1} = -\operatorname{ctg} \alpha^{**}$ ,  $\frac{OC}{R} = -\cos \alpha$  и  $\frac{BC}{R} = \sin \alpha$ ; такимъ образомъ  
 $-\operatorname{ctg} \alpha = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha}$ , откуда  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

\*) Выраженіе  $-\cos \alpha$  по виду отрицательно, но по значенію оно для второй четверти положительно, такъ какъ  $\cos \alpha$  здѣсь имѣетъ отрицательное значеніе (напр. если  $\alpha = 150^\circ$ , то по § 20  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , слѣд.  $-\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ).

Вотъ еще нѣсколько случаевъ подобныхъ этому: 1)  $\cos^2 100^\circ$  имѣетъ отрицат. значеніе; 2)  $\sqrt{\sin 200^\circ}$  есть количество мнимое; 3)  $\sqrt{-\cos 100^\circ}$  есть количество дѣйствительное; 4)  $\lg (\operatorname{tg}^2 300^\circ)$  возможенъ, потому, что  $\operatorname{tg}^2 \alpha$  всегда положительно, но нельзя написать  $\lg (\operatorname{tg}^2 300^\circ) = 2 \lg \operatorname{tg} 300^\circ$ , такъ какъ  $\operatorname{tg} 300^\circ$  имѣетъ отрицательное значеніе; 5) если  $a > b$ , то  $a \cdot \sin 100^\circ > b \cdot \sin 100^\circ$ , но  $a \cdot \sin 200^\circ < b \cdot \sin 200^\circ$ ; и т. д.

\*\*) Получено изъ равенства  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{A_1F}{R}$ .

с)  $\triangle OEA \propto OBC$ , поэтому  $\frac{OE}{OA} = \frac{OB}{OC}$ ; отсюда  $\frac{OE}{OA} = \frac{OB}{R} \cdot \frac{OC}{R}$ ;  
но  $\frac{OE}{OA} = -\operatorname{sc} \alpha$ ,  $\frac{OB}{R} = 1$  и  $\frac{OC}{R} = -\operatorname{cs} \alpha$ ; слѣд.  $-\operatorname{sc} \alpha = \frac{1}{-\operatorname{cs} \alpha}$ ,  
откуда  $\operatorname{sc} \alpha \cdot \operatorname{cs} \alpha = 1$ .

**35\*.** Кромѣ основныхъ формулъ полезно замѣтить еще слѣдующія, которые можно получить уже какъ производныя изъ нихъ.

1) Перемножая соответственные части равенствъ II и III (§ 32), будемъ имѣть  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1^*)$  (VI).

2) Для равенство I на  $\operatorname{cs}^2 \alpha$  и примѣняя формулы II и IV, получимъ (если переставимъ слагаемыя первой части)

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sc}^2 \alpha \quad (\text{VII}).$$

3) Для равенство I на  $\operatorname{sn}^2 \alpha$  и примѣняя формулы III и V, найдемъ

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{csc}^2 \alpha \quad (\text{VIII}).$$

Такъ какъ основныя формулы вѣрны для всѣхъ угловъ, то и новыя три, какъ ихъ слѣдствіе, имѣютъ такое же свойство.

**Замѣчаніе.** Самостоятельно формула VI получается изъ подобія треугольниковъ, а формулы VII и VIII при помощи теоремы Пифагора (изъ прямоугольныхъ треугольниковъ).

**35. Примеры опредѣленія однихъ тригонометрическихъ функций съ помощью другихъ.**

**Примеръ 1.** Выразить  $\operatorname{cs} \alpha$  черезъ  $\operatorname{sn} \alpha$ .

**Рѣшеніе.** а) Изъ формулы I имѣемъ  $\operatorname{cs}^2 \alpha = 1 - \operatorname{sn}^2 \alpha$ ; слѣдов. абсол. величина  $\operatorname{cs} \alpha$  равна абсол. величинѣ квадратнаго корня изъ  $1 - \operatorname{sn}^2 \alpha$ . Означая черезъ  $\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \alpha}$  положительное значеніе корня<sup>1)</sup> и соображая знаки косинуса<sup>2)</sup> въ разныхъ четвертяхъ, найдемъ: 1) для I и IV четверти  $\operatorname{cs} \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \alpha}$  и 2) для II и III четверти  $\operatorname{cs} \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \alpha}$ .

б) Если кромѣ значенія синуса ничего болѣе не извѣстно<sup>3)</sup>, то о знакѣ косинуса можно сказать слѣдующее: какъ при

\*) Мнемоническое замѣчаніе къ формуламъ IV, V и VI: *функции одного и того же угла равноудаленныя отъ концовъ* (ряда:  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cs}$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$ ,  $\operatorname{sc}$ ,  $\operatorname{csc}$ ) *даютъ въ произведеніи единицу*.

1) Въ такомъ же смыслѣ будемъ ставить знакъ  $\sqrt{\quad}$  и далѣе.

2) Т.-е. положительность или отрицательность его значеній.

3) Пусть напр. задача поставлена такъ: дано значеніе синуса; требуется найти значеніе косинуса, если онъ принадлежитъ тому же самому углу.

положительною, такъ и при отрицательномъ синусѣ косинусъ можетъ быть и положительнъ и отрицателенъ<sup>1)</sup>; поэтому при всякомъ значеніи  $\sin \alpha$  можно удержать для  $\cos \alpha$  оба знака и написать  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ).

**Примръ 2.** Выразить  $\sin \alpha$  черезъ  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\alpha$  оканчивается во II четверти.

**Рѣшеніе.** 1-й способъ. Изъ формулы II слѣдуетъ  $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$ ; теперь опредѣлимъ  $\cos \alpha$  съ помощью формулъ IV и VII

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\sec^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \text{откуда } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}^{**});$$

подстановка въ первое равенство даетъ  $\sin \alpha = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}^{***})$ .

2-й способъ. По формуламъ VIII и VI имѣемъ:

$$\csc^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \text{отсюда на означеніи формулы V}$$

$$\text{получимъ } \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad \text{Такимъ образомъ } \sin \alpha \text{ и } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

имѣютъ одинаковую абсолютную величину, но во II четверти  $\sin \alpha$  имѣетъ положительное значеніе, а  $\operatorname{tg} \alpha$  (и слѣдств. вся дробь) отрицательно; поэтому для равенства дробь надо взять съ обратнымъ

$$\text{значеніемъ, такъ что } \sin \alpha = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

**Примръ 3.** Дано  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ . Вычислить функции  $\alpha$ .

**Рѣшеніе.** Начнемъ съ той функции, которая въ произведеніи съ данною составляетъ единицу, въ настоящемъ случаѣ съ котангенса по форм. VI получимъ  $\operatorname{ctg} \alpha = 1 : \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{3}$ . Непо-

<sup>1)</sup> См. § 27, а также черт 9

<sup>\*)</sup> Приписывая  $\alpha$  къ  $\sin$  и  $\cos$ , мы здѣсь показываемъ только, что синусъ и косинусъ принадлежатъ одному и тому же углу, но при  $\pm \sqrt{\dots}$  значеніе  $\alpha$ , конечно, иное, чѣмъ при  $-\sqrt{\dots}$ .

<sup>\*\*)</sup> Знакъ минусъ получимъ, рассуждая какъ раньше [прим 1, а)]

<sup>\*\*\*)</sup> Это равенство съ виду противорѣчитъ положительности синуса во II четверти, но не надо забывать, что во II четверти тангенсъ имѣетъ отрицательное значеніе, а потому вторая часть равенства по значенію положительна

редственно по тангенсу<sup>1)</sup> можно определить еще секанс: а именно, по форм. VII будемъ имѣть  $\sec^2 \alpha = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$ ; такъ какъ при отрицательномъ тангенсѣ секансъ можетъ быть и положительный и отрицательный<sup>2)</sup>, то принимаемъ  $\sec \alpha = \pm \frac{5}{4}$ . Далѣе по форм. IV находимъ  $\csc \alpha = 1 : \left(\pm \frac{5}{4}\right) = \pm \frac{4}{5}$ . Для опредѣленія  $\operatorname{sn} \alpha$  возьмемъ формулу,  $\frac{\operatorname{sn} \alpha}{\csc \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ ; при помощи ея получимъ  $\operatorname{sn} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \csc \alpha = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\pm \frac{4}{5}\right) = \mp \frac{3}{5}$ . Наконецъ по форм. V найдемъ  $\cos \alpha = 1 : \left(\mp \frac{3}{5}\right) = \mp \frac{5}{3}$ .

Итакъ, — соблюдая соответствие знаковъ, — будемъ имѣть слѣдующія два<sup>3)</sup> рѣшенія:

$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sec \alpha$	$\csc \alpha$	$\operatorname{sn} \alpha$	$\csc \alpha$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{5}{3}$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$

*Замѣчаніе.* Для опредѣленія  $\operatorname{sn} \alpha$  формула II удобна тѣмъ, что при ней получилось и *соответствіе знаковъ*; между тѣмъ прилѣбная формулу I, пришлось бы знаки синуса и косинуса *подбирать* (въ настоящемъ случаѣ они должны быть *разные*, такъ какъ тангенсъ отрицателенъ)<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> При имѣющихся формулахъ

<sup>2)</sup> См табл. § 27 и черт. 11.

<sup>3)</sup> Ср въ § 22 построение для случая  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$

<sup>4)</sup> Если бы знакъ тангенса не былъ извѣстенъ, то въ знакахъ синуса и косинуса были бы возможны *четыре* комбинаціи.

### III. Формулы приведения.

**37. Перемѣна знака въ аргументѣ.** Пусть  $\alpha$  означаетъ какой угодно уголъ; тогда  $-\alpha$  будетъ означать уголъ съ той же абсолютной величиной, но противоположный по знаку<sup>1)</sup>. Сравнимъ функции этихъ угловъ, а для этого образуемъ оба угла отъ общаго начала.

Представимъ себѣ, что два подвижныхъ радіуса отошли отъ общаго начала въ *разныя* стороны и — за исключеніемъ этого — вращаются одинаково; тогда, если одинъ опишетъ уголъ  $\alpha$ , то другой опишетъ уголъ  $-\alpha$ .

Но при сказанномъ условіи подвижные радіусы каждый разъ симметричны относительно горизонтальнаго діаметра<sup>2)</sup>; поэтому горизонтальная проекція у нихъ общая, а вертикальныя проекціи равны, но лежатъ по *разныя* стороны центра; слѣдовательно  $\text{cs}(-\alpha)$  и  $\text{cs} \alpha$  равны, а  $\text{sn}(-\alpha)$  и  $\text{sn} \alpha$  имѣютъ одинаковую абсолютную величину, но разные знаки, такъ что для равенства надо  $\text{sn} \alpha$  взять съ обратнымъ знакомъ. Такимъ образомъ:

$$\text{sn}(-\alpha) = -\text{sn} \alpha \quad (1); \quad \text{cs}(-\alpha) = \text{cs} \alpha \quad (2).$$

Дѣля (1) на (2), а затѣмъ наоборотъ, получимъ:

$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg} \alpha \quad (3), \quad \text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg} \alpha \quad (4).$$

Дѣля единицу на каждую часть равенства (2), а затѣмъ на каждую часть равенства (1), найдемъ:

$$\text{sc}(-\alpha) = \text{sc} \alpha \quad (5); \quad \text{csc}(-\alpha) = -\text{csc} \alpha \quad (6).$$

---

<sup>1)</sup> Напримѣръ: если  $\alpha = -1050^\circ$ , то  $-\alpha = 1050^\circ$ , если  $\alpha = 40^\circ$ , то  $-\alpha = -40^\circ$ , и т. д.

<sup>2)</sup> Т.-е. расположены такъ, что, перегибая кругъ по горизонтальному діаметру, мы ихъ совмѣстимъ.

Итакъ, въ случаѣ косинуса и секанса можно мѣнять знакъ аргумента, не измѣняя тѣмъ значенія функций, а въ остальныхъ случаяхъ, мѣняя знакъ аргумента надо въ то же время измѣнить знакъ передъ функцией.

*Примѣры.* 1)  $\operatorname{tg}(-40^\circ) = -\operatorname{tg} 40^\circ$ ;  $\operatorname{sc}(-40^\circ) = \operatorname{sc} 40^\circ$ .

2)  $\operatorname{sn}(-1570^\circ) = -\operatorname{sn} 1570^\circ$ ;  $\operatorname{cs}(-1570^\circ) = \operatorname{cs} 1570^\circ$ .

3)  $\operatorname{tg} 300^\circ = -\operatorname{tg}(-300^\circ)$ .

4)  $\operatorname{csc}(\alpha - 90^\circ) = -\operatorname{csc}(90^\circ - \alpha)$ .

5)  $-\operatorname{sn} \frac{\alpha - \beta}{2} = -\left(-\operatorname{sn} \frac{\beta - \alpha}{2}\right) = \operatorname{sn} \frac{\beta - \alpha}{2}$ .

**38. Приведеніе тригонометрическихъ функций всякаго угла къ функциямъ положительнаго острого.** Тригонометрическія функции всякаго угла весьма просто выражаются съ помощью такихъ же или родственныхъ<sup>1)</sup> функций угла положительнаго острого. Покажемъ, какъ это достигается.

1. Сначала переходимъ на *положительный уголъ меньшій періода* (а слѣдовательно меньшій  $360^\circ$ ); при этомъ надо различать два случая:

а) Если данный уголъ *положителенъ* (и болѣе періода), то вычитаемъ изъ него достаточное число періодовъ<sup>2)</sup> (§ 30); напр.

$$\operatorname{sn} 1340^\circ = \operatorname{sn} 260^\circ$$

$$\operatorname{cs} 720^\circ = \operatorname{cs} 0$$

$$\operatorname{tg} 1070^\circ = \operatorname{tg} 170^\circ$$

$$\operatorname{ctg} 260^\circ = \operatorname{ctg} 80^\circ$$

$$\begin{array}{r|l} 1340 & 360 \\ \hline 1080 & 3 \\ \hline 260 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1070 & 360 \\ \hline 900 & 5 \\ \hline 170 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1070 & 360 \\ \hline 900 & 5 \\ \hline 170 & \end{array}$$

б) Если данный уголъ *отрицателенъ*, то прибавляемъ къ нему достаточное число положительныхъ періодовъ<sup>3)</sup>; напр.

$$\operatorname{tg}(-2200^\circ) = \operatorname{tg}(-2200^\circ + 180^\circ \cdot 13) = \operatorname{tg} 140^\circ$$

$$\operatorname{sn}(-1080^\circ) = \operatorname{sn}(-1080^\circ + 360^\circ \cdot 3) = \operatorname{sn} 0$$

$$\operatorname{sc}(-2600^\circ) = \operatorname{sc}(-2600^\circ + 360^\circ \cdot 8) = \operatorname{sc} 280^\circ$$

$$\begin{array}{r|l} 2200 & 180 \\ \hline 400 & 12 \\ \hline 40 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2600 & 360 \\ \hline 2520 & 7 \\ \hline 80 & \end{array}$$

<sup>1)</sup> Родственными тригонометрическими функциями называютъ:  $\operatorname{sn}$  и  $\operatorname{cs}$ ,  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$ ,  $\operatorname{sc}$  и  $\operatorname{csc}$

<sup>2)</sup> Короче. беремъ остатокъ отъ дѣленія данного угла на періодъ.

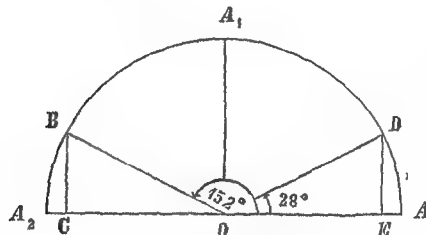
<sup>3)</sup> Вычисленіе производимъ такъ: абсолютную величину угла дѣлимъ на періодъ и, если получится остатокъ, беремъ дополнение къ нему (до періода)

[Другой способъ: сначала измѣняемъ только знакъ аргумента, а затѣмъ поступаемъ какъ въ а); напримѣръ  $\operatorname{tg}(-1030^\circ) = -\operatorname{tg} 1030^\circ = -\operatorname{tg} 130^\circ$ ].

2. Имѣя уголъ между 0 и  $360^\circ$ , пользуемся тѣми острыми углами, на которые подвижнымъ радіусомъ дѣлится соответствующій прямой уголъ между главными діаметрами; такъ для  $152^\circ$  эти углы суть  $28^\circ$  и  $62^\circ$ , и можно перейти на любой изъ нихъ, поступая какъ будетъ показано далѣе.

39. Чтобы замѣтить, какъ примѣняются острые углы, образуемые подвижнымъ радіусомъ съ главными діаметрами, разберемъ нѣсколько примѣровъ (при этомъ для синуса и косинуса будемъ дѣлать построеніе, а остальные функціи выражать съ ихъ помощью).

1. Пусть будетъ  $\angle AOB = 152^\circ$ ; тогда  $\angle A_1OB = 62^\circ$  и  $\angle A_2OB = 28^\circ$ .



Черт. 20

а) Перейдемъ на  $28^\circ$ . Чтобы составить функціи этого угла, надо сперва его *отложить отъ общаго начала*: пусть будетъ  $\angle AOD = 28^\circ$ ; проведя перпендикуляры  $BC$  и  $DE$ , получимъ равные треугольники  $OBC$  и  $ODE$ .

Линія  $BC$  равна линіи  $DE$ , слѣдов.  $\operatorname{sn} 152^\circ$  имѣетъ такую же абсолютную величину, какъ и  $\operatorname{sn} 28^\circ$ ; кромѣ того оба синуса одинаковы по знаку; такимъ образомъ  $\operatorname{sn} 152^\circ = \operatorname{sn} 28^\circ$ .

Изъ равенства линій  $OC$  и  $OE$ \*) слѣдуетъ, что абсолютная величина  $\operatorname{cs} 152^\circ$  равна абсолютной величинѣ  $\operatorname{cs} 28^\circ$ ; но  $\operatorname{cs} 28^\circ$  имѣетъ положительное значеніе, а  $\operatorname{cs} 152^\circ$  отрицательное; поэтому  $\operatorname{cs} 152^\circ$  равенъ  $\operatorname{cs} 28^\circ$  взятому съ обратнымъ знакомъ<sup>1)</sup>, т.-е.

$$\operatorname{cs} 152^\circ = -\operatorname{cs} 28^\circ.$$

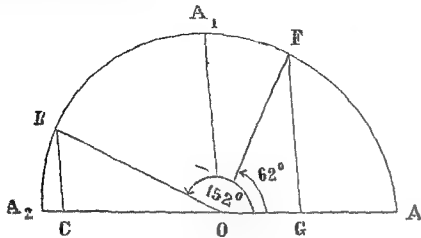
Изъ выведенныхъ равенствъ слѣдуетъ (ср. § 37):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 152^\circ &= -\operatorname{tg} 28^\circ; & \operatorname{ctg} 152^\circ &= -\operatorname{ctg} 28^\circ \\ \operatorname{cs} 152^\circ &= -\operatorname{cs} 28^\circ; & \operatorname{csc} 152^\circ &= \operatorname{csc} 28^\circ. \end{aligned}$$

\*) Изъ одинаковости ихъ длинны.

<sup>1)</sup> И наоборотъ:  $\operatorname{cs} 26^\circ$  равенъ  $\operatorname{cs} 152^\circ$  взятому съ обратнымъ знакомъ ( $\operatorname{cs} 26^\circ = -\operatorname{cs} 152^\circ$ ).

б) Перейдемъ на  $62^\circ$ . Отложивъ отъ общаго начала  $\angle AOF = 62^\circ$  и проводя перпендикуляры  $BC$  и  $FG$ , получимъ равные треугольники  $OBC$  и  $FOG$ .



Черт. 21

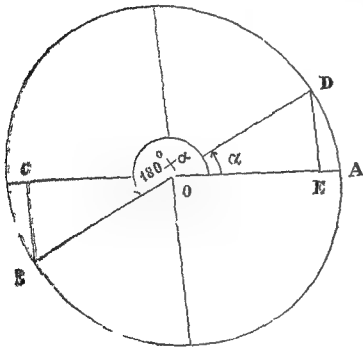
Изъ равенства линий  $BC$  и  $OG$  слѣдуетъ, что абсолютная величина  $\sin 152^\circ$  равна абсолютной величинѣ  $\sin 62^\circ$ ; притомъ обѣ функціи положительны; слѣдовательно  $\sin 152^\circ = \sin 62^\circ$

Такъ какъ линия  $OC$  равна  $FG$ , то абсолютная величина  $\cos 152^\circ$  равна абсолютной величинѣ  $\sin 62^\circ$ ; но  $\sin 62^\circ$  положителенъ, а  $\cos 152^\circ$  отрицателенъ; слѣдовательно  $\cos 152^\circ$  равенъ  $\sin 62^\circ$  взятому съ обратнымъ знакомъ, т.-е.

$$\cos 152^\circ = -\sin 62^\circ.$$

Изъ выведенныхъ равенствъ слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 152^\circ &= -\operatorname{ctg} 62^\circ; & \operatorname{ctg} 152^\circ &= -\operatorname{tg} 62^\circ \\ \sec 152^\circ &= -\operatorname{csc} 62^\circ; & \operatorname{csc} 152^\circ &= \sec 62^\circ. \end{aligned}$$



Черт. 22.

2. Пусть будетъ  $\angle AOB = 180^\circ + \alpha$ . Поступая какъ раньше, найдемъ, что  $\sin (180^\circ + \alpha)$  и  $\cos (180^\circ + \alpha)$  по абсолютной величинѣ соответственно равны  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ ; но эти функціи положительны, а первыя двѣ отрицательны; слѣдовательно

$$\begin{aligned} \sin (180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos (180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \end{aligned}$$

откуда  $\operatorname{tg} (180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha^*$

и т. д.

\* ) Это равенство можно получить также по § 31.



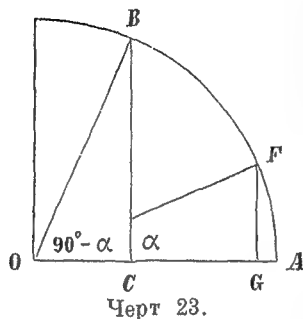
3. Для  $\angle AOB = 90^\circ - \alpha^*)$  рассуждаем так: его функций и функций угла  $\alpha$  одинаковы по знаку (положительны); следовательно остается сравнить их абсолютные величины. Сопоставляя какъ въ примѣрѣ 1 б), найдемъ:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

отсюда  $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ ; и т. д.

(Вообще: функции положительнаго острого угла равны родственнымъ функциямъ его дополненія до  $90^\circ$ ).



Черт. 23.

40. Въ разобранныхъ примѣрахъ обратимъ вниманіе на слѣдующее: примѣняемые острые углы оба содержатся въ тр-кѣ  $OBC$ , и отложеніе ихъ отъ начального радиуса вмѣстѣ съ послѣдующимъ построениемъ равносильно перенесенію того же тр-ка въ новое положеніе; при этомъ вертикальный и горизонтальный катеты такими же и останутся, если построение дѣлается для угла, который былъ при горизонтальномъ діаметрѣ; если же примѣняется другой уголъ, то съ перенесеніемъ тр-ка вертикальный катетъ сдѣлается горизонтальнымъ, и обратно.

Въ первомъ случаѣ названія функции сохраняются, во второмъ случаѣ данныя функции замѣняются родственными. Далѣе, всѣ тригонометрическія функции въ I четверти положительны, поэтому въ тѣхъ случаяхъ, когда приводимая функция имѣетъ отрицательное значеніе, слѣдуетъ передъ функцией острого угла ставить минусъ.

**Замѣчаніе.** Если построениемъ будемъ пользоваться не только для синуса и косинуса, но и для остальныхъ функций, то тр-ковъ получимъ три, и построение, которое сдѣлаемъ для острого угла, будетъ также лишь новымъ размѣщеніемъ тѣхъ же самыхъ треугольниковъ \*\*).

\*) Для такого угла излагаемый переходъ имѣетъ цѣлью или измѣнить названіе функции или уменьшить острый уголъ (если  $90^\circ - \alpha > \alpha$ )

\*\*) Предлагаемъ учащемуся сдѣлать соответствующіе чертежи (для первоначальнаго угла и обоихъ острыхъ — на отдѣльныхъ равныхъ кругахъ).

**41. Правило** Изъ §§ 39 и 40 вытекаеть слѣдующее практическое правило. Переходя на острый уголъ, надо: 1) *поставить минусъ передъ функцией остраго угла, если приводимая функция отрицательна*; 2) *удержать названіе приводимой функции, если острый уголъ взять съ горизонтальнаго діаметра, или замѣнить приводимую функцию родственной, если острый уголъ взять съ вертикальнаго діаметра.*

*Примѣры (примѣненія правила).*

1. *Привести къ острому углу  $\text{ctg } 300^\circ$ .*

Данный уголъ переходитъ за вертикальный діаметръ на  $30^\circ$  ( $300^\circ = 270^\circ + 30^\circ$ ) и не доходитъ до горизонтальнаго на  $60^\circ$  ( $300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$ ). Имѣя въ виду это и зная, что  $\text{ctg } 300^\circ$  отрицателенъ, получимъ: а)  $\text{ctg } 300^\circ = -\text{tg } 30^\circ$  и б)  $\text{ctg } 300^\circ = -\text{ctg } 60^\circ$ .

2. *Привести  $\text{csc } 170^\circ$  къ острому углу не превышающему  $45^\circ$ .*

Такимъ угломъ служить уголъ  $10^\circ$ . Имѣя въ виду, что это есть уголъ при горизонтальномъ діаметрѣ и что  $\text{csc } 170^\circ$  положителенъ, найдемъ  $\text{csc } 170^\circ = \text{csc } 10^\circ$ .

3. *Преобразовать функции угла  $270^\circ - \alpha$  (предполагая  $0 < \alpha < 90^\circ$ ).*

Уголъ  $\alpha$  здѣсь считается отъ вертикальнаго діаметра; изъ функций даннаго угла (III четв.) положительны только тангенсъ и котангенсъ; такимъ образомъ

$$\text{sn } (270^\circ - \alpha) = -\text{csa}; \quad \text{cs } (270^\circ - \alpha) = -\text{sn } \alpha$$

$$\text{tg } (270^\circ - \alpha) = \text{ctg } \alpha; \quad \text{ctg } (270^\circ - \alpha) = \text{tg } \alpha$$

$$\text{sc } (270^\circ - \alpha) = -\text{csc } \alpha \quad \text{csc } (270^\circ - \alpha) = -\text{sc } \alpha.$$

**42. Итакъ** тригонометрическія функции всякаго угла приводятся къ функциямъ угла положительнаго остраго; при этомъ, благодаря двоякому его выбору, всегда возможно приведеніе къ углу не превышающему  $45^\circ$ .

Въ слѣдующихъ примѣрахъ примѣняются совместно §§ 38 и 41.

$$\begin{aligned} 1) \text{ sn } 2050^\circ &= \text{sn } 250^\circ = -\text{sn } 70^\circ \\ &= -\text{cs } 20^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 2050 & 360 \\ 1800 & 5 \\ \hline 250 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ tg } (-1575^\circ) &= \text{tg } 45^\circ & [\S 38. 1 \text{ б)}] \\ &= \text{ctg } 45^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 1575 & 180 \\ 1440 & 8 \\ \hline 135 & \end{array}$$

или — по другому способу:

$$\begin{aligned} \text{tg } (-1575^\circ) &= -\text{tg } 1575^\circ = -\text{tg } 135^\circ = -(-\text{tg } 45^\circ) = \text{tg } 45^\circ \\ &= -(-\text{ctg } 45^\circ) = \text{ctg } 45^\circ. \end{aligned}$$

43. Для послѣдующаго прилагаемъ таблицу, въ которой сдѣлано приведеніе къ острому углу ( $\alpha$ ) во всѣхъ случаяхъ между 0 и  $360^\circ$ .

$\alpha$	sn	cs	tg	ctg	sc	csc	
$90^\circ - \alpha$	cs $\alpha$	sn $\alpha$	ctg $\alpha$	tg $\alpha$	csc $\alpha$	sc $\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha^*)$
$90^\circ + \alpha$	cs $\alpha$	-sn $\alpha$	-ctg $\alpha$	-tg $\alpha$	-csc $\alpha$	sc $\alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
$180^\circ - \alpha$	sn $\alpha$	-cs $\alpha$	-tg $\alpha$	-ctg $\alpha$	-sc $\alpha$	csc $\alpha$	$\pi - \alpha$
$180^\circ + \alpha$	-sn $\alpha$	-cs $\alpha$	tg $\alpha$	ctg $\alpha$	-sc $\alpha$	-csc $\alpha$	$\pi + \alpha$
$270^\circ - \alpha$	-cs $\alpha$	-sn $\alpha$	ctg $\alpha$	tg $\alpha$	-csc $\alpha$	-sc $\alpha$	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$
$270^\circ + \alpha$	-cs $\alpha$	sn $\alpha$	-ctg $\alpha$	-tg $\alpha$	csc $\alpha$	-sc $\alpha$	$\frac{3}{2}\pi + \alpha$
$360^\circ - \alpha$	-sn $\alpha$	cs $\alpha$	-tg $\alpha$	-ctg $\alpha$	sc $\alpha$	-csc $\alpha$	$2\pi - \alpha$

44. **Общность формулъ приведенія.** Формулы, полученные въ §§ 37 и 43, — такъ называемыя *формы приведенія*, — обладаютъ общностью, т. е. вѣрны при всѣхъ значеніяхъ  $\alpha^{**})$ . Докажемъ это.

Для формулъ § 37 доказательство уже имѣется, такъ какъ при ихъ выводѣ значеніе  $\alpha$  ничѣмъ не было ограничено.

Но составляя таблицу § 43, мы означали черезъ  $\alpha$  уголъ положительный острый; теперь разберемъ тѣ же виды аргумента, оставляя уголъ  $\alpha$  совершенно произвольнымъ. Достаточно сдѣлать это для синуса и косинуса: остальное получится какъ слѣдствіе; кромѣ того формулы, содержащія разность, можно вывести изъ формулъ для суммы, разъ общность ихъ будетъ доказана: такъ,

\*) Такъ будемъ имѣть:  $\text{sn}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cs } \alpha$ ;  $\text{cs}(\pi + \alpha) = -\text{cs } \alpha$ ; и т. д.

\*\*) Такъ въ таблицѣ § 43 значится  $\text{sn}(270^\circ + \alpha) = -\text{cs } \alpha$  въ предположеніи, что  $0 < \alpha < 90^\circ$ , но подставляя напр.  $\alpha = -500^\circ$ , получимъ  $\text{sn}(270^\circ - 500^\circ) = -\text{cs}(-500^\circ)$ , что оказывается также вѣрнымъ.

если формула  $\text{cs}(90^\circ + \alpha) = -\text{sn } \alpha$  есть *общая*, вѣрная для суммы  $90^\circ$  съ *какимъ угодно* угломъ, то взявъ  $90^\circ$  въ суммѣ съ угломъ  $-\alpha$ , получимъ  $\text{cs}[90^\circ + (-\alpha)] = -\text{sn } (-\alpha)$ ; преобразуя же  $90^\circ + (-\alpha)$  и примѣняя ко второй части *общую* формулу  $\text{sn } (-\alpha) = -\text{sn } \alpha$ , будемъ имѣть  $\text{cs}(90^\circ - \alpha) = \text{sn } \alpha$ .

Случаи въ аргументѣ приводимой функціи для доказательства видопзмѣнимъ и распредѣлимъ такъ:

1)  $\pm \alpha + 180^\circ$ , 2)  $-\alpha + 360^\circ$ , 3)  $\pm \alpha + 90^\circ$  и 4)  $\pm \alpha + 270^\circ$ .

Переходимъ къ самому доказательству.

45. 1. а) Какой бы ни былъ уголъ, отъ присоединенія къ нему  $180^\circ$  подвижной радіусъ перейдетъ въ противоположную четверть и составитъ одну прямую съ прежнимъ своимъ положеніемъ (или: коонецъ дуги перейдетъ въ точку діаметрально противоположную); слѣдовательно синусъ и косинусъ сохранять абсолютную величину, а знаки обоихъ измѣняются\*); поэтому

$$\text{sn}(180^\circ + \alpha) = -\text{sn } \alpha$$

$$\text{cs}(180^\circ + \alpha) = -\text{cs } \alpha.$$

б) Примѣняя эти формулы къ углу  $-\alpha$ , получимъ

$$\text{sn}(180^\circ - \alpha) = -\text{sn } (-\alpha) = \text{sn } \alpha$$

$$\text{cs}(180^\circ - \alpha) = -\text{cs } (-\alpha) = -\text{cs } \alpha.$$

46. 2. Уголъ  $-\alpha + 360^\circ$  имѣетъ общія стороны съ угломъ  $-\alpha$ ; поэтому

$$\text{sn}(360^\circ - \alpha) = \text{sn } (-\alpha) = -\text{sn } \alpha$$

$$\text{cs}(360^\circ - \alpha) = \text{cs } (-\alpha) = \text{cs } \alpha.$$

47\*. 3. а) Если къ какому-либо углу прибавить  $90^\circ$ , то подвижной радіусъ перейдетъ въ слѣдующую четверть и составитъ съ вертикальнымъ діаметромъ такой же уголъ, какой раньше составлялъ съ горизонтальнымъ діаметромъ, и наоборотъ; поэтому его новая вертикальная проекція равна прежней горизонтальной, а новая горизонтальная проекція равна прежней вертикальной. Отсюда слѣдуетъ, что  $\text{sn}(\alpha + 90^\circ)$  и  $\text{cs}(\alpha + 90^\circ)$  имѣютъ такую же абсолютную величину, какъ  $\text{cs } \alpha$  и  $\text{sn } \alpha$ . Что же касается знаковъ,

---

\*) То же самое происходитъ и при вычитаніи  $180^\circ$ , вообще если прибавляется или вычитается нечетное число полуоборотовъ.

то они таковы (въ зависимости отъ четверти, гдѣ оканчивается уголъ  $\alpha$ ):

$\alpha + 90^\circ$	sn	cs	$\alpha$
II	+	+	I
III	—	—	II
IV	—	—	III
I	+	+	IV

$\alpha + 90^\circ$	cs	sn	$\alpha$
II	—	+	I
III	—	+	II
IV	+	—	III
I	+	—	IV

Видимъ, что  $\text{sn}(\alpha + 90^\circ)$  и  $\text{cs} \alpha$  имѣютъ всегда одинаковые знаки, а  $\text{cs}(\alpha + 90^\circ)$  и  $\text{sn} \alpha$  противоположные.

$$\begin{aligned}\text{Такимъ образомъ} \quad \text{sn}(90^\circ + \alpha) &= \text{cs} \alpha \\ \text{cs}(90^\circ + \alpha) &= -\text{sn} \alpha.\end{aligned}$$

б) Примѣняя полученные формулы къ углу  $-\alpha$ , найдемъ

$$\begin{aligned}\text{sn}(90^\circ - \alpha) &= \text{cs}(-\alpha) = \text{cs} \alpha \\ \text{cs}(90^\circ - \alpha) &= -\text{sn}(-\alpha) = \text{sn} \alpha.\end{aligned}$$

48\*. 4. а) Если къ какому-либо углу прибавить  $270^\circ$ , то подвижной радіусъ измѣнитъ свое положеніе такъ же, какъ отъ поворота на  $-90^\circ$ . Поэтому вертикальная и горизонтальная проекціи обмѣняются длиною (ср. § 47), такъ что абсол. величины  $\text{sn}(\alpha + 270^\circ)$  и  $\text{cs}(\alpha + 270^\circ)$  соответственно равны абсол. величинамъ  $\text{cs} \alpha$  и  $\text{sn} \alpha$ . Чтобы сравнить знаки, предположимъ конецъ  $\alpha$  послѣдовательно въ каждой четверти:

$\alpha + 270^\circ$	sn	cs	$\alpha$
IV	—	+	I
I	+	—	II
II	+	—	III
III	—	+	IV

$\alpha + 270^\circ$	cs	sn	$\alpha$
IV	+	+	I
I	+	+	II
II	—	—	III
III	—	—	IV

Видимъ, что  $\text{sn}(\alpha + 270^\circ)$  и  $\text{cs} \alpha$  имѣютъ всегда противоположные знаки, а  $\text{cs}(\alpha + 270^\circ)$  и  $\text{sn} \alpha$  одинаковые.

$$\begin{aligned}\text{Такимъ образомъ} \quad \operatorname{sn}(270^\circ + \alpha) &= -\operatorname{cs} \alpha \\ \operatorname{cs}(270^\circ + \alpha) &= \operatorname{sn} \alpha.\end{aligned}$$

б) Подстановка угла  $-\alpha$  даетъ

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(270^\circ - \alpha) &= -\operatorname{cs}(-\alpha) = -\operatorname{cs} \alpha \\ \operatorname{cs}(270^\circ - \alpha) &= \operatorname{sn}(-\alpha) = -\operatorname{sn} \alpha.\end{aligned}$$

**49.** Итакъ, дѣлая выводъ въ общемъ видѣ, мы получили такія же формулы, какія содержатся въ таблицѣ § 43.

Въ задачахъ, — чтобы припомнить формулу, — надо сперва представить себѣ  $\alpha$  между  $0$  и  $90^\circ$  и примѣнить правило, данное въ § 41.

*Примѣры* (на §§ 44—49).

1) Привести  $\operatorname{tg}(90^\circ + 300^\circ)$  къ углу  $300^\circ$ .

Если бы вмѣсто  $300^\circ$  былъ острый уголъ, то онъ былъ бы при вертикальномъ діаметрѣ и кромѣ того  $\operatorname{tg}$  былъ бы отрицателенъ; слѣдовательно надо писать  $\operatorname{tg}(90^\circ + 300^\circ) = -\operatorname{ctg} 300^\circ$ .

2) Преобразовать  $\operatorname{sn}(\alpha - 270^\circ)$ .

Имѣемъ:  $\operatorname{sn}(\alpha - 270^\circ) = -\operatorname{sn}(270^\circ - \alpha) = -(-\operatorname{cs} \alpha) = \operatorname{cs} \alpha$ .

3) Преобразовать  $\operatorname{cs}(\alpha + 180^\circ \cdot n)$ , гдѣ  $n$  есть неопределенное число.

а) Если  $n$  четное  $= 2k$ , то  $\operatorname{cs}(\alpha + 180^\circ \cdot 2k) = \operatorname{cs}(\alpha + 360^\circ \cdot k) = \operatorname{cs} \alpha$ ; б) если же  $n$  нечетное  $= 2k + 1$ , то  $\operatorname{cs}[\alpha + 180^\circ \cdot (2k + 1)] = \operatorname{cs}(180^\circ + \alpha + 360^\circ \cdot k) = \operatorname{cs}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{cs} \alpha^*)$ .

Эти два случая можно объединить въ формулѣ

$$\operatorname{cs}(\alpha + 180^\circ \cdot n) = (-1)^n \cdot \operatorname{cs} \alpha^{**}).$$

\*) Или: а) при  $n$  четномъ концы дугъ  $\alpha + 180^\circ \cdot n$  и  $\alpha$  совпадаютъ, и потому  $\operatorname{cs}(\alpha + 180^\circ \cdot n) = \operatorname{cs} \alpha$ ; б) при  $n$  нечетномъ концы дугъ  $\alpha + 180^\circ \cdot n$  и  $\alpha$  диаметрально противоположны, и потому  $\operatorname{cs}(\alpha + 180^\circ \cdot n) = -\operatorname{cs} \alpha$ .

\*\*) Такъ при  $n = -4$  получимъ:  $\operatorname{cs}[\alpha + 180^\circ(-4)] = (-1)^{-4} \cdot \operatorname{cs} \alpha$  или  $\operatorname{cs}(\alpha - 180^\circ \cdot 4) = \frac{1}{(-1)^4} \operatorname{cs} \alpha = \operatorname{cs} \alpha$ ; и т. п.

#### IV. Примѣненіе таблицъ къ вычисленію тригонометрическихъ выраженій и къ нахожденію угловъ. Полученіе угла въ общемъ видѣ.

50. Вычисленіе нѣкоторыхъ выраженій, содержащихъ тригонометрическія функціи. Разберемъ нѣсколько примѣровъ на примѣненіе тригонометрическихъ таблицъ; при этомъ будемъ пользоваться лишь обыкновенными таблицами, т.-е. такими, которыя содержатъ *логариемы* тригонометрическихъ функцій (для угловъ отъ 0 до  $90^\circ$ )\*).

Какъ найти логариомъ функціи, если данный уголъ острый, — излагается во введеніи къ таблицамъ, а потому здѣсь не будемъ повторять этого, предполагая, что учащійся уже освоился съ этимъ случаемъ при помощи самыхъ таблицъ.

*Примѣры.* 1) *Вычислить  $\operatorname{tg} 19^\circ 50' 24''$ .*

По тригонометрическимъ таблицамъ найдемъ  $\lg \operatorname{tg} 19^\circ 50' 24'' = 9,55728 - 10$ ; къ этому логариому ищемъ соответствующее число \*\*): получимъ  $\operatorname{tg} 19^\circ 50' 24'' = 0,36081$ .

2) *Вычислить  $x = \operatorname{cs} 862^\circ 30' 23''$ .*

Имѣемъ:  $\operatorname{cs} 862^\circ 30' 23'' = \operatorname{cs} 142^\circ 30' 23'' = -\operatorname{sn} 52^\circ 30' 23''$ ; такимъ образомъ  $x = -\operatorname{sn} 52^\circ 30' 23''$  или  $-x = \operatorname{sn} 52^\circ 30' 23''$ . Теперь возьмемъ  $\lg(-x) = \lg \operatorname{sn} 52^\circ 30' 23'' = 9,89950 - 10$ ; отсюда:  $-x = 0,79342$  или  $x = -0,79342$ .

Итакъ  $\operatorname{cs} 862^\circ 30' 23'' = -0,79342$ .

---

\*) Есть еще таблицы, гдѣ помѣщены не логариемы функцій, а самыя функціи (такъ назыв. *таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ*).

\*\*) Предполагаемъ, что учащійся умѣетъ уже примѣнять таблицы логариомовъ чиселъ.

3) Вычислить  $\sqrt{\operatorname{tg}^2 325^\circ}$  \*).

Имѣемъ:  $\sqrt{\operatorname{tg}^2 325^\circ} = \sqrt{(-\operatorname{tg} 35^\circ)^2} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 35^\circ} = \operatorname{tg} 35^\circ$ .

Далѣе поступаемъ какъ въ примѣрѣ 1.

4) Вычислить  $x = \sqrt[5]{\operatorname{sn}^3 205^\circ}$ .

Имѣемъ:  $\sqrt[5]{\operatorname{sn}^3 205^\circ} = \sqrt[5]{(-\operatorname{sn} 25^\circ)^3} = \sqrt[5]{-\operatorname{sn}^3 25^\circ} = -\sqrt[5]{\operatorname{sn}^3 25^\circ}$ ;

такимъ образомъ  $x = -\sqrt[5]{\operatorname{sn}^3 25^\circ}$  или  $-x = \sqrt[5]{\operatorname{sn}^3 25^\circ}$ .

Далѣе поступаемъ какъ въ примѣрѣ 2, а именно: находимъ  $\lg(-x) = 0,6$ ,  $\lg \operatorname{sn} 25^\circ = 9,77557 - 10$ ; отсюда:  $-x = 0,59644$ ;  $x = -0,59644$ .

Итакъ  $\sqrt[5]{\operatorname{sn}^3 205^\circ} = -0,59644$ .

5) Вычислить  $\sqrt{\operatorname{ctg} 156^\circ}$ .

Имѣемъ:  $\sqrt{\operatorname{ctg} 156^\circ} = \sqrt{-\operatorname{ctg} 24^\circ} = i \sqrt{\operatorname{ctg} 24^\circ}$ ; съ помощью таблицъ найдемъ  $\sqrt{\operatorname{ctg} 24^\circ} = 1,49869$ .

Итакъ  $\sqrt{\operatorname{ctg} 156^\circ} = 1,49869 i$ .

**51. Нахождение табличнаго угла.** Для этой цѣли данное значеніе функціи должно быть положительное. Уголь опредѣляютъ по логарифму функціи.

Способъ этого опредѣленія излагается обыкновенно при самыхъ таблицахъ; поэтому здѣсь будемъ считать его уже извѣстнымъ учащемуся и ограничимся только примѣромъ.

*Примѣръ.* Найти табличный уголь  $x$ , если  $\operatorname{cs} x = 0,52437$ .

Сначала возьмемъ  $\lg \operatorname{cs} x = 9,71964 - 10$ ; пользуясь этимъ логарифмомъ, получимъ  $x = 58^\circ 22' 26''$ .

**52. Нахождение угловъ, содержащихся между 0 и  $360^\circ$ .** Въ этой задачѣ будемъ пользоваться построеніемъ подвижнаго радіуса (§ 22) и формулами приведенія (§ 41). Разберемъ отдѣльные случаи на примѣрахъ, при чемъ, для удобства, удержимъ тѣ же самыя значенія функцій, какія были взяты въ § 22 \*\*).

Изъ построеній видно, что между 0 и  $360^\circ$  получаются каждый разъ вообще два угла: въ слѣдующихъ примѣрахъ будемъ ихъ обозначать черезъ  $x_1$  и  $x_2$ , а табличный уголь черезъ  $\varphi$ .

\*) Здѣсь и въ слѣдующихъ примѣрахъ значеніе корня предполагается простѣйшее.

\*\*) Въ послѣдующемъ изложеніи надо имѣть въ виду чертежи § 22.



*Примѣры.* 1. а)  $\operatorname{sn} x = \frac{3}{5}$ . Между 0 и  $360^\circ$  имѣемъ  $x_1 = \varphi$

и  $x_2 = 180^\circ - \varphi$ ; уголъ  $\varphi$  опредѣлится изъ условія  $\operatorname{sn} \varphi = \frac{3}{5}$  \*).

Такимъ образомъ найдемъ  $x_1 = 36^\circ 52' 11''$  и  $x_2 = 143^\circ 7' 49''$ .

б)  $\operatorname{sn} x = -\frac{1}{2}$ . Полагаемъ  $x_1 = 180^\circ + \varphi$  и  $x_2 = 360^\circ - \varphi$ ; тогда

$\operatorname{sn} x = -\operatorname{sn} \varphi$ ; слѣдовательно  $\operatorname{sn} \varphi = \frac{1}{2}$ , откуда  $\varphi = 30^\circ$ . Такимъ

образомъ  $x_1 = 210^\circ$  и  $x_2 = 330^\circ$ .

2. а)  $\operatorname{cs} x = \frac{1}{3}$ . Имѣемъ  $x_1 = \varphi$  и  $x_2 = 360^\circ - \varphi$ ;  $\operatorname{cs} \varphi = \frac{1}{3}$ .

Отсюда:  $x_1 = 70^\circ 31' 43''$  и  $x_2 = 289^\circ 28' 17''$ .

б)  $\operatorname{cs} x = -\frac{4}{5}$ . Полагаемъ  $x_1 = 180^\circ - \varphi$  и  $x_2 = 180^\circ + \varphi$ ; тогда

$\operatorname{cs} x = -\operatorname{cs} \varphi$ , слѣдовательно  $\operatorname{cs} \varphi = \frac{4}{5}$ , откуда  $\varphi = 36^\circ 52' 12''$ .

Такимъ образомъ  $x_1 = 143^\circ 7' 48''$  и  $x_2 = 216^\circ 52' 12''$ .

3. а)  $\operatorname{tg} x = 2$ . Полагая  $x_1 = \varphi$  и  $x_2 = 180^\circ + \varphi$ . Вычисливъ  $\varphi$  по  $\operatorname{tg} \varphi = 2$ , получимъ  $x_1 = 63^\circ 26' 6''$  и  $x_2 = 243^\circ 26' 6''$ .

б)  $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ . Полагая  $x_1 = 180^\circ - \varphi$  и  $x_2 = 360^\circ - \varphi$ , будемъ

имѣть  $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} \varphi$ , слѣдовательно  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$ , откуда  $\varphi = 36^\circ 52' 12''$ .

Окончательно:  $x_1 = 143^\circ 7' 48''$  и  $x_2 = 323^\circ 7' 48''$ .

4. а)  $\operatorname{ctg} x = 1$ . Имѣемъ  $x_1 = \varphi$  и  $x_2 = 180^\circ + \varphi$ ;  $\operatorname{ctg} \varphi = 1$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ;  $x_1 = 45^\circ$  и  $x_2 = 225^\circ$ .

б)  $\operatorname{ctg} x = -\frac{2}{3}$ . Полагаемъ  $x_1 = 180^\circ - \varphi$  и  $x_2 = 360^\circ - \varphi$ ;

тогда  $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} \varphi$ ; слѣдовательно  $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{2}{3}$ , откуда  $\varphi =$

$56^\circ 18' 36''$ . Такимъ образомъ  $x_1 = 123^\circ 41' 24''$  и  $x_2 = 303^\circ 41' 24''$ .

5 и 6. Въ случаѣ секанса и косеканса слѣдуетъ переходить на косинусъ и синусъ. Напримѣръ, если дано  $\operatorname{sc} x = -2$ , то сначала беремъ  $\operatorname{cs} x = -\frac{1}{2}$  и отсюда уже найдемъ  $120^\circ$  и  $240^\circ$ .

---

\*)  $\operatorname{sn} \varphi = 0,6$ ,  $\lg \operatorname{sn} \varphi = 9,77815 - 10$ ,  $\varphi = 36^\circ 52' 11''$ .

**Правило.** Изъ сдѣланнаго разбора примѣровъ вытекаетъ слѣдующее правило: беремъ для функции только абсолютную величину даннаго значенія и находимъ табличный уголъ; искомые углы получимъ, если отложимъ найденный уголъ отъ горизонтальнаго диаметра въ тѣхъ четвертяхъ, гдѣ функция имѣетъ данный знакъ.

Пусть, на примѣръ,  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; взявъ  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , получимъ  $\varphi = 60^\circ$ ; синусъ отрицателенъ въ III и IV четверти; слѣдовательно, согласно правилу, будемъ имѣть:  $x_1 = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$  и  $x_2 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ .

**Замѣчаніе.** Въ предыдущихъ примѣрахъ уголъ  $\varphi$  вездѣ былъ введенъ такъ, что названіе функции сохранялось; т. е., конечно, равно возможно и другой переходъ.

На примѣръ, имѣя  $\cos x = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ , удобно положить  $x_1 = 90^\circ + \varphi$  и  $x_2 = 270^\circ - \varphi$ ; тогда найдемъ:  $\cos x = -\sin \varphi$ ;  $\sin \varphi = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ ,  $\varphi = 18^\circ$ ;  $x_1 = 108^\circ$  и  $x_2 = 252^\circ$ .

Для этого способа предыдущее правило измѣнится въ слѣдующемъ: если абсолютная величина даннаго значенія функции берется для родственной функции, то найденныя табличные углы откладываютъ отъ вертикальнаго диаметра.

Пусть напр.  $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ . Тогда сообщаемъ такъ:  $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$  есть  $\sin 22^\circ 36'$ ; косинусъ отрицателенъ въ II и III четверти; поэтому будемъ имѣть  $x_1 = 90^\circ + 22^\circ 36' = 112^\circ 36'$  и  $x_2 = 270^\circ - 22^\circ 36' = 247^\circ 36'$ .

**53. Общій видъ угла для данной функции.** Если дано значеніе какой-либо одной функции, то ему соответствуютъ два положенія подвижнаго радіуса; изъ нихъ на каждое приходится *безконечный рядъ* угловъ; такимъ образомъ уголъ, соответствующій данному значенію функции, можетъ имѣть безконечное число различныхъ значеній. Найти *общій видъ* угла значить составить формулу (или нѣсколько формулъ), по которой можно получить *все* эти значенія.

**54.** Положимъ, что сдѣлано построение и мы получили два подвижныхъ радіуса; пусть будетъ  $\alpha$  какой-нибудь уголъ, соответ-

ствующій первому подвижному радіусу, и  $\beta$  уголъ, соотвѣтствующій второму подвижному радіусу<sup>1)</sup>.

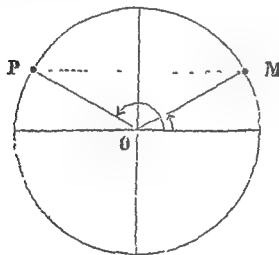
Тогда всѣ углы, содержащіе первый подвижной радіусъ, выражаются формулой  $\alpha + 360^\circ \cdot n$ , а всѣ углы со вторымъ подвижнымъ радіусомъ войдутъ въ формулу  $\beta + 360^\circ \cdot n$  \*). Такимъ образомъ совокупность формулъ  $\alpha + 360^\circ \cdot n$  и  $\beta + 360^\circ \cdot n$  представитъ рѣшеніе вопроса: давая  $n$  всѣ цѣлыя значенія отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ , мы получимъ всѣ значенія искомага угла (въ видѣ двухъ прогрессій).

**55\*.** Только что изложенный приемъ есть совершенно общій. Теперь покажемъ: 1) какой выборъ  $\alpha$  и  $\beta$  наиболее удобенъ въ примѣненіяхъ \*\*) и 2) какія возможны упрощенія въ формулахъ въ зависимости отъ свойствъ самой функціи или отъ особенностей даннаго ея значенія.

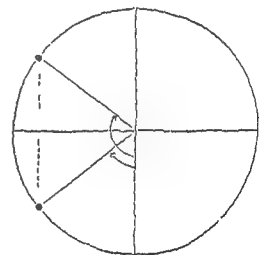
1) Что касается  $\alpha$  и  $\beta$ , то берутъ значенія съ наименьшей абсолютной величиной, хотя бы и отрицательныя; 2) упрощеніе формулъ состоитъ въ томъ, что вмѣсто двухъ различныхъ прогрессій можетъ получиться только одна.

Перейдемъ къ разбору отдѣльныхъ случаевъ<sup>2)</sup>.

**56. Примѣры.** Въ послѣдующемъ черезъ  $\phi$  означенъ табличный уголъ и предполагается, что уголъ  $\alpha$  по абсолютной величинѣ не болѣе угла  $\beta$ .



Черт. 24.



Черт. 25.

1. а)  $\sin x = \frac{1}{2}$ . По § 52 найдемъ  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 150^\circ$ ; слѣдов. будемъ имѣть  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot n$  и  $x_2 = 150^\circ + 360^\circ \cdot n$ . Эти двѣ

<sup>1)</sup> Таковы напр. углы, находящиеся въ § 52.

\*) См. § 10.

\*\*) Къ теоріи и задачамъ.

<sup>2)</sup> sc и csc разсматривать не будемъ.

прогрессии соответствуют: одна исключительно точки  $M$ , другая исключительно точки  $P$ ; покажемъ, что рядъ, который содержитъ бы все искомыя дуги, уже не будетъ прогрессіей. Дѣйствительно, начавъ напримѣръ съ дуги  $30^\circ$ , пойдемъ въ обѣ стороны, не пропуская ни  $M$ , ни  $P$ ; получимъ:

конецъ дуги	....	$P$	$M$	$P$	$M$	$P$	$M$	$P$	....
дуга	....	$-570^\circ$	$-330^\circ$	$-210^\circ$	$30^\circ$	$150^\circ$	$390^\circ$	$510^\circ$	....

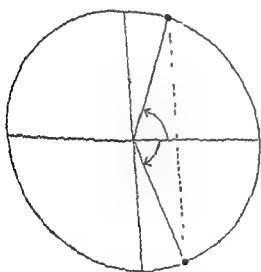
Вслѣдствіе того, что  $OM$  и  $OP$  не составляютъ одной прямой линіи, послѣдовательные переходы здѣсь не равны (*чередуются*  $120^\circ$  и  $240^\circ$ ); такимъ образомъ одной прогрессіи не получимъ.

Сказанное относится и къ остальнымъ случаямъ, въ которыхъ подвижные радіусы составляютъ *ломаную* линію.

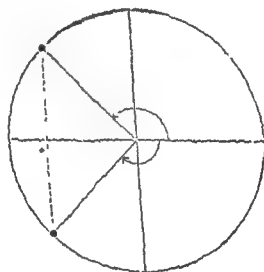
b)  $\sin x = -\frac{4}{5}$ . Полагаемъ  $\alpha = -\varphi$  и  $\beta = -(180^\circ - \varphi)$ ;

отсюда:  $\sin \varphi = \frac{4}{5}$ ,  $\varphi = 53^\circ 7' 48''$ . Такимъ образомъ:  $\alpha = -53^\circ 7' 48''$ ;

$\beta = -126^\circ 52' 12''$ . Полное рѣшеніе есть:  $x_1 = -53^\circ 7' 48'' + 360^\circ .n$ ;  
 $x_2 = -126^\circ 52' 12'' + 360^\circ .n$ .



Черт. 26.

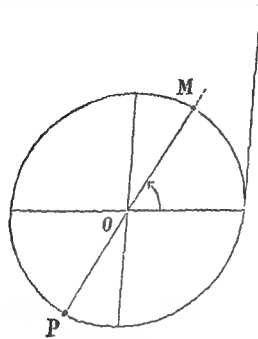


Черт. 27.

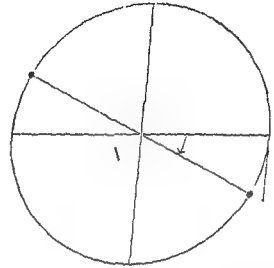
2. a)  $\cos x = \frac{1}{3}$ . Получимъ:  $\alpha = \varphi$ ,  $\beta = -\alpha$ ;  $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ ,  
 $\varphi = 70^\circ 31' 43''$ . Такимъ образомъ  $x_1 = 70^\circ 31' 43'' + 360^\circ .n$  и  
 $x_2 = -70^\circ 31' 43'' + 360^\circ .n$ .

b)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Имѣемъ:  $\alpha = 180^\circ - \varphi$ ,  $\beta = -\alpha$ ,  $\cos \varphi =$   
 $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ;  $\alpha = 135^\circ$ ,  $\beta = -135^\circ$ . Полное рѣшеніе есть:  
 $x_1 = 135^\circ + 360^\circ .n$ ;  $x_2 = -135^\circ + 360^\circ .n$ .

3. а)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ . Такъ какъ въ случаѣ тангенса подвижные радіусы составляютъ одну прямую, то подбирая дуги послѣдовательно<sup>1)</sup>, образуемъ рядъ, въ которомъ разность дугъ вездѣ оди-



Черт. 28.

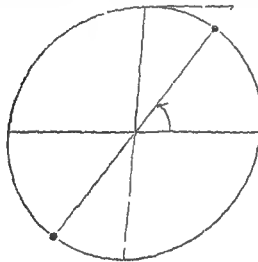


Черт. 29.

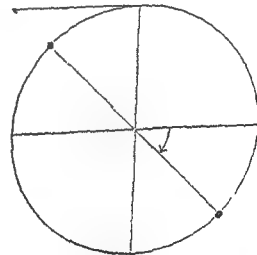
накова, а именно  $180^\circ$ . Возьмемъ за исходную дугу  $60^\circ$ ; прибавляя къ ней по  $180^\circ$ , получимъ рядъ дугъ въ одну сторону; а вычитая по  $180^\circ$ , получимъ рядъ дугъ въ другую сторону:

конецъ дуги	....	P	M	P	M	P	M	P	....
д у г а	....	$-480^\circ$	$-300^\circ$	$-120^\circ$	$60^\circ$	$240^\circ$	$420^\circ$	$600^\circ$	....

Имѣемъ прогрессію съ разностью  $180^\circ$ ; всѣ члены ея можно получить по формулѣ  $x = 60^\circ + 180^\circ \cdot n$ .



Черт. 30.



Черт. 31.

б)  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$  (\*). Полагаемъ  $\alpha = -\varphi$ ; тогда  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2}$ .  $\varphi = 26^\circ 33' 54''$ ; слѣдовательно  $\alpha = -26^\circ 33' 54''$ . Подобно предыдущему найдемъ  $x = -26^\circ 33' 54'' + 180^\circ \cdot n$ .

<sup>1)</sup> Т-е. идя въ одномъ направленіи и не пропуская ни M, ни P.

\*) Сюда относится черт. 29.

4. а)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3}$ . Находим  $\alpha = 56^\circ 18' 36''$ . Разсуждая теперь

такъ же, какъ въ случаѣ тангенса, получимъ  $x = 56^\circ 18' 36'' + 180^\circ . n$ .

б)  $\operatorname{ctg} x = -1$ . Имѣемъ:  $\alpha = -\varphi$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ ,  $\varphi = 45^\circ$ . Подобно предыдущему  $x = -45^\circ + 180^\circ . n$ .

57. Итакъ для тангенса или котангенса углы получаются *всегда въ одной прогрессіи*, съ разностью  $180^\circ$ . Какъ *исключеніе* можетъ получиться одна прогрессія и въ случаѣ синуса или косинуса<sup>1)</sup>; *вообще* же для нихъ углы распределяются въ *два* прогрессіи, съ разностью  $360^\circ$ .

Разсмотримъ теперь упомянутыя исключенія.

58. а)  $\operatorname{sn} x = 0$ . Нулевой синусъ соотвѣтствуетъ концамъ горизонтальнаго діаметра, слѣдовательно встрѣчается черезъ каждые  $180^\circ$ . Разсуждая какъ въ случаѣ тангенса, найдемъ  $x = 0 + 180^\circ . n$  или, короче  $x = 180^\circ . n$ .

б)  $\operatorname{sn} x = 1$ . Соотвѣтствующее положеніе подвижнаго радіуса только *одно* (иногда его разсматриваютъ какъ *слигное*); поэтому и получится только одна прогрессія, съ разностью  $360^\circ$ . Такъ какъ  $\alpha = 90^\circ$ , то  $x = 90^\circ + 360^\circ . n$ .

в)  $\operatorname{sn} x = -1$ . Разсуждая какъ въ б), будемъ имѣть:  $\alpha = -90^\circ$ ,  $x = -90^\circ + 360^\circ . n$ .

г)  $\operatorname{cs} x = 0$ . Это значеніе косинуса соотвѣтствуетъ концамъ вертикальнаго діаметра, слѣдовательно встрѣчается черезъ каждые  $180^\circ$ . Разсуждая какъ въ случаѣ тангенса, найдемъ:  $\alpha = 90^\circ$ ,  $x = 90^\circ + 180^\circ . n$ .

е)  $\operatorname{cs} x = 1$ . Здѣсь только *одно* положеніе подвижнаго радіуса. Получимъ:  $\alpha = 0$ ,  $x = 0 + 360^\circ . n$  или  $x = 360^\circ . n$ .

ф)  $\operatorname{cs} x = -1$ . Случай однородный съ е). Будемъ имѣть:  $\alpha = 180^\circ$ ,  $x = 180^\circ + 360^\circ . n$ .

59. Замѣчаніе. I. Въ § 56 п. 1 углы, соотвѣтствующіе данному синусу, были собраны въ двѣ прогрессіи; но ихъ можно выразить *въ одной формулой*. Сдѣлаемъ это.

Въ п. 1 а) получено:  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ . n$  и  $x_2 = 150^\circ + 360^\circ . n$ ; но  $30^\circ + 360^\circ . n = 30^\circ + 180^\circ . 2n$  и  $150^\circ + 360^\circ . n = 180^\circ - 30^\circ + 360^\circ . n = -30^\circ + 180^\circ . (2n+1)$ . Знакъ при  $30^\circ$  зависитъ здѣсь

<sup>1)</sup> А именно въ случаяхъ:  $\operatorname{sn} x = 0$ ; 1;  $-1$  и  $\operatorname{cs} x = 0$ ; 1;  $-1$  (§ 58).

отъ четности  $(2n)$  или нечетности  $(2n+1)$  множителя при  $180^\circ$ ; эту зависимость можно указать съ помощью степени отрицательной единицы: а именно, полагаемъ  $x=30^\circ \cdot (-1)^m + 180^\circ \cdot m$ , означая через  $m$  неопредѣленное цѣлое число, безразлично четное или нечетное<sup>1)</sup>.

Въ п. 1 б) получено:

$$x_1 = -53^\circ 7' 48'' + 360^\circ \cdot n \text{ и } x_2 = -126^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot n.$$

Преобразуемъ эти выраженія:

$$x_1 = -53^\circ 7' 48'' + 180^\circ \cdot 2n;$$

$$x_2 = -(180^\circ - 53^\circ 7' 48'') + 180^\circ \cdot 2n = 53^\circ 7' 48'' + 180^\circ \cdot (2n-1).$$

Теперь подобно предыдущему находимъ

$$x = (-53^\circ 7' 48'') \cdot (-1)^m + 180^\circ \cdot m.$$

II. Формулы, полученныя въ § 56 для случая косинуса, часто пишутъ слитно; такъ будемъ имѣть

$$\text{въ п. 2 а) } x = \pm 70^\circ 31' 43'' + 360^\circ \cdot n,$$

$$\text{въ п. 2 б) } x = \pm 135^\circ + 360^\circ \cdot n^*).$$

<sup>1)</sup> Развертывая новую формулу, получимъ уже не прогрессию, но тотъ рядъ, который приведенъ въ § 56 п. 1 а)

$x$	....	$-570^\circ$	$-330^\circ$	$-210^\circ$	$30^\circ$	$150^\circ$	$390^\circ$	$510^\circ$	.. .
$m$	. .	-3	-2	-1	0	1	2	3	...

\*) Примѣняя эту формулу, получимъ слѣдующи рядъ:

$x$	.. .	$-495^\circ$	$-225^\circ$	$-135^\circ$	$135^\circ$	$225^\circ$	$495^\circ$	....
	.	-1		0		1		....

Здѣсь каждому значенію  $n$  соотвѣтствуютъ два значенія  $x$

## V. Формулы сложения аргументовъ, вычитанія, умноженія и дѣленія.

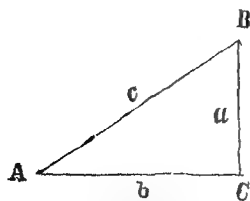
**60.** Нѣкоторыя изъ теоремъ о треугольникѣ. Сюда мы переносимъ четыре теоремы изъ отдѣла о рѣшеніи треугольниковъ: это дѣлаемъ для вывода, помѣщеннаго въ § 64.

Сначала укажемъ новыя обозначенія; а именно: во всякомъ треугольникѣ ( $ABC$ ) принято обозначать величину угловъ тѣми же буквами, какъ и вершины ( $A, B, C$ ), а длину противоположащихъ сторонъ одноименными малыми буквами ( $a, b, c$ ); при этомъ обыкновенно предполагають, что стороны измѣрены одной и той же единицей.

Перейдемъ теперь къ теоремамъ.

**61. Теорема I.** Катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ противолежащаго <sup>1)</sup> угла.

**Теорема II.** Катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на косинусъ прилежащаго <sup>2)</sup> угла.



Черт. 32.

*Доказ.* Сдѣлаемъ уголъ  $A$  центральнымъ, описавъ между его сторонами дугу радіусомъ  $c$ .

По опредѣленію синуса и косинуса получимъ  $\frac{a}{c} = \sin A$  и  $\frac{b}{c} = \cos A$ ;

отсюда  $a = c \cdot \sin A$  (теор. I)

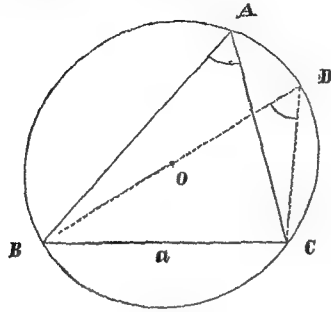
и  $b = c \cdot \cos A$  (теор. II).

<sup>1)</sup> Катету.

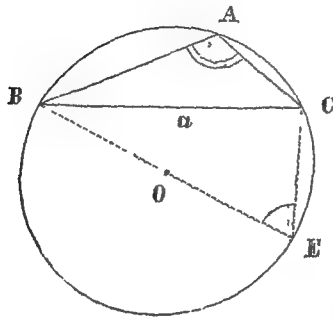
<sup>2)</sup> Къ катету.



**62. Теорема III.** Во всякомъ треугольникѣ сторона равна диаметру описаннаго круга, умноженному на синусъ противолежащаго угла ( $a = 2R \cdot \sin A$ ).



Черт. 33



Черт. 34

*Доказ.* Противолежаций (сторонѣ) уголъ можетъ представить три случая, которые и разберемъ отдѣльно.

1) Уголъ  $A$  острый. Включимъ  $a$  и  $2R$  въ одинъ треугольникъ, напр.  $BDC$ . Такъ какъ уголъ  $BCD$  прямой, то по теоремѣ I

$$a = 2R \cdot \sin D;$$

но  $\angle D = A^*$ ; слѣдовательно

$$a = 2R \cdot \sin A.$$

2) Уголъ  $A$  тупой. Поступая какъ раньше, найдемъ (изъ прямоугольнаго треугольника  $BCE$ )

$$a = 2R \cdot \sin E;$$

но  $E + A = 180^\circ$ , слѣдовательно  $\sin E = \sin A$  (§ 39); подставляя получимъ

$$a = 2R \cdot \sin A.$$

3. Уголъ  $A$  прямой. Формула распространяется и на этотъ случай, какъ предѣльный для разсмотрѣнныхъ.

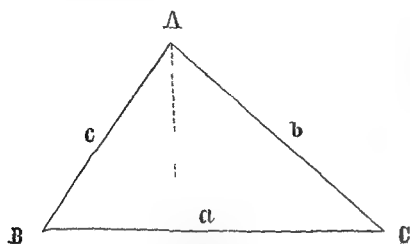
*Замѣчаніе.* Доказанную теорему выражаютъ еще такъ: хорда равна диаметру, умноженному на синусъ опирающагося на нее вписаннаго угла.

**63: Теорема IV.** Во всякомъ треугольникѣ сторона равна суммѣ двухъ другихъ сторонъ, соответственно умноженныхъ на косинусъ угла, образуемаго съ первой стороной ( $a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$ ).

*Доказ.* Рассмотримъ отдѣльно три случая въ углахъ при первой сторонѣ.

\*) Тотъ и другой измѣряется половиной дуги  $BC$ .

1) Случай двухъ острыхъ угловъ. Проведя высоту  $AD$ , будемъ имѣть



Черт. 35.

$$a = BD + DC;$$

но по теоремѣ II

$$BD = c \cdot \cos B \text{ и } DC = b \cdot \cos C;$$

такимъ образомъ

$$a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C.$$

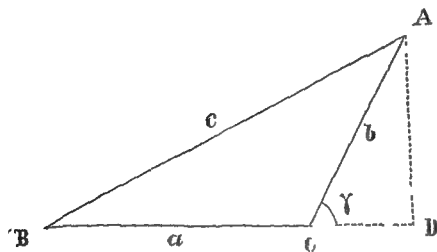
2. Случай тупого угла. Проведемъ высоту  $AD$ ; теперь она пройдетъ *вне* треугольника, и мы получимъ:

$$a = BD - CD.$$

Изъ треугольниковъ  $BAD$  и  $CAD$  найдемъ

$$BD = c \cdot \cos B \text{ и } CD = b \cdot \cos \gamma.$$

Чтобы исключить  $\gamma$ , замѣтимъ, что  $\gamma + C = 180^\circ$ , а потому  $\cos \gamma = -\cos C$  (см. подстрочное примѣчаніе къ § 39).



Черт. 36

Подставляя получимъ

$$a = c \cdot \cos B - [b \cdot (-\cos C)] = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C.$$

3) Случай прямого угла не требуетъ особаго доказательства, такъ какъ онъ предѣльный для каждаго изъ рассмотрѣнныхъ.

**64\*.** Синусъ суммы двухъ угловъ (или дугъ). Докажемъ, что

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

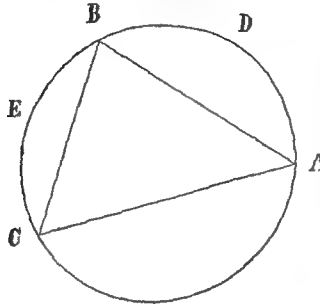
каковы бы ни были значенія  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Доказ.* Пусть будутъ  $\alpha$  и  $\beta$  двѣ дуги любой величины и знака<sup>1)</sup>. По окружности произвольнаго радіуса опишемъ *последовательно*  $2\alpha$  и  $2\beta$ \*): пусть будутъ  $A$  и  $B$  начало и конецъ дуги  $2\alpha$ ,  $B$  и  $C$  начало и конецъ дуги  $2\beta$ ; тогда  $A$  и  $C$  будутъ начало и конецъ дуги  $2\alpha + 2\beta$ .

\*) Напримѣръ  $\alpha = 600^\circ$ ,  $\beta = -130^\circ$  и т. д.

<sup>1)</sup> Цѣль удвоения дугъ будетъ видна впоследствии.

I. Хорду, соответствующую суммѣ дугъ, выразимъ съ помощью хордъ, соответствующихъ слагаемымъ дугамъ: а именно по § 63 найдемъ



Черт. 37.

$$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C.$$

Выразимъ здѣсь стороны треугольника черезъ діаметръ описаннаго круга:

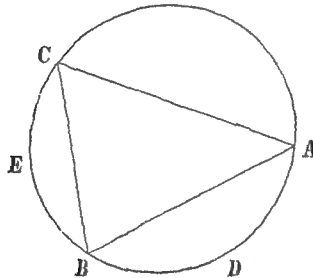
$$2R \cdot \sin B = 2R \cdot \sin C \cdot \cos A + 2R \cdot \sin A \cdot \cos C;$$

отсюда  $\sin B = \sin C \cdot \cos A + \cos C \cdot \sin A$ .

Такъ какъ  $B + (C + A) = 180^\circ$ , то  $\sin B = \sin (C + A)$ , и предыдущее равенство замѣнится такимъ:

$$\sin (C + A) = \sin C \cdot \cos A + \cos C \cdot \sin A *). \quad (M)$$

II. Перейдемъ теперь отъ угловъ треугольника  $ABC$  къ даннымъ дугамъ  $\alpha$  и  $\beta$ .



Черт. 38.

Углы  $C$  и  $A$  измѣряются половинами своихъ внутреннихъ дугъ, — при условіи, что въ этихъ дугахъ берется только абсолютная величина; но чтобы связать тѣ же дуги съ  $\alpha$  и  $\beta$ , надо въ нихъ различать и направленіе; а оно зависитъ отъ положенія точекъ  $B$  и  $C$  относительно точки  $A$ . Разсмотримъ эту зависимость.

Здѣсь возможны два случая: первый представленъ на черт. 37, а второй на черт. 38\*\*). Въ обоихъ случаяхъ внутреннія дуги угловъ  $C$  и  $A$  имѣютъ общія крайнія точки съ дугами  $2\alpha$  и  $2\beta$ ; а потому можно будетъ примѣнить § 10, если мы въ упомянутыхъ внутреннихъ дугахъ крайнія точки будемъ различать такъ же, какъ въ  $2\alpha$

\*) Эта формула имѣетъ уже требуемый составъ, но она доказана пока только для угловъ треугольника.

\*\*) Эти случаи можно выразить такъ: идя изъ точки  $A$  по окружности въ опредѣленномъ направленіи, напр. въ положительномъ, мы встрѣтимъ или сначала точку  $B$ , а потомъ  $C$  (черт. 37), или же наоборотъ (черт. 38).

и  $2\beta$ , т.-е. если одну дугу будемъ считать отъ  $A$  къ  $B$ , а другую отъ  $B$  къ  $C$ . Итакъ, рассмотримъ дуги  $ADB$  и  $BEC$  \*): на черт. 37 онѣ обѣ положительны, а на черт. 38 обѣ отрицательны; въ последнемъ случаѣ для измѣренія вписанныхъ угловъ надо будеть дуги взять съ обратнымъ знакомъ.

Послѣ этихъ замѣчаній обратимся къ тому переходу, который мы имѣли въ виду.

Примѣняя § 10, найдемъ для обоихъ указанныхъ выше случаевъ

$$\cup ADB = 2\alpha + 360^\circ \cdot m \quad \text{и} \quad \cup BEC = 2\beta + 360^\circ \cdot n^{**}).$$

Выражая углы  $C$  и  $A$ , получимъ, соответственно знакамъ дугъ:

$$1) C = \alpha + 180^\circ \cdot m \quad \text{и} \quad A = \beta + 180^\circ \cdot n, \quad \text{откуда}$$

$$C + A = \alpha + 180^\circ \cdot \overline{m+n}$$

$$\text{или} \quad 2) C = -(\alpha + 180^\circ \cdot m) \quad \text{и} \quad A = -(\beta + 180^\circ \cdot n), \quad \text{откуда}$$

$$C + A = -(\alpha + \beta + 180^\circ \cdot \overline{m+n}).$$

Подставляя эти выраженія въ равенство  $(M)$  и поступая во второмъ случаѣ по § 37, будемъ имѣть:

$$1) \sin(\alpha + \beta + 180^\circ \cdot \overline{m+n}) = \sin(\alpha + 180^\circ \cdot m) \cdot \cos(\beta + 180^\circ \cdot n) \\ + \cos(\alpha + 180^\circ \cdot m) \cdot \sin(\beta + 180^\circ \cdot n) \quad (P)$$

$$2) -\sin(\alpha + \beta + 180^\circ \cdot \overline{m+n}) = [-\sin(\alpha + 180^\circ \cdot m)] \cdot \cos(\beta + 180^\circ \cdot n) \\ + \cos(\alpha + 180^\circ \cdot m) \cdot [-\sin(\beta + 180^\circ \cdot n)]. \quad (Q)$$

Но равенство  $(Q)$  переменъ знаковъ приводится къ тому же виду, какой имѣетъ равенство  $(P)$ ; а потому далѣе будемъ разсматривать только одно это равенство.

III Въ равенствѣ  $(P)$  приведемъ функціи къ аргументамъ  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . Такъ какъ при этомъ оказываетъ вліяніе четность или нечетность  $m$  и  $n^{***})$ , то разсмотримъ всѣ различные случаи, какіе здѣсь возможны:

\*) Порядокъ буквъ указываетъ направленіе дугъ.

\*\*) Числа  $m$  и  $n$  найдутся въ зависимости отъ  $2\alpha$  и  $2\beta$ : если напр.  $2\alpha = 120^\circ$  и  $2\beta = -260^\circ$ , то  $m = -3$  и  $n = 1$  ( $\cup ADB = 120^\circ$  и  $\cup BEC = -100^\circ$ ); если  $2\alpha = 1310^\circ$  и  $2\beta = 300^\circ$ , то  $m = -4$  и  $n = -1$  ( $\cup ADB = -130^\circ$  и  $\cup BEC = -60^\circ$ ); и т. д.

\*\*\*)) Напомнимъ, что концы дугъ  $\alpha$  и  $\alpha + 180^\circ \cdot m$  при  $m$  четномъ совпадаютъ, а при  $m$  нечетномъ диаметрально противоположны (см. также §§ 45 и 49).

1)  $m$  и  $n$  числа четные; тогда  $m+n$  также число четное<sup>1)</sup>.

$$\text{Получимъ } \operatorname{sn}(\alpha+\beta) = \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta + \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta \quad (1)$$

2)  $m$  и  $n$  числа нечетные;  $m+n$  будетъ тогда число четное.

Получимъ

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta) = (-\operatorname{sn} \alpha) \cdot (-\operatorname{cs} \beta) + (-\operatorname{cs} \alpha) \cdot (-\operatorname{sn} \beta) \quad (2)$$

3)  $m$  четное, а  $n$  нечетное, или наоборотъ;  $m+n$  тогда есть число нечетное. Получимъ

$$a) -\operatorname{sn}(\alpha+\beta) = \operatorname{sn} \alpha \cdot (-\operatorname{cs} \beta) + \operatorname{cs} \alpha \cdot (-\operatorname{sn} \beta) \quad (3,a)$$

$$\text{или } b) -\operatorname{sn}(\alpha+\beta) = (-\operatorname{sn} \alpha) \cdot \operatorname{cs} \beta + (-\operatorname{cs} \alpha) \cdot \operatorname{sn} \beta. \quad (3,b)$$

Равенства (1), (2), (3,a) и (3,b) приводятъ къ одной и той же формулѣ

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta) = \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta + \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta. \quad (IX)$$

Общность ея такимъ образомъ доказана.

**Замѣчаніе.** Случаи, когда сливаются въ одну точку двѣ вершины треугольника или даже всѣ три, подводятся подъ найденную формулу какъ предѣльные.

**65\*. Синусъ разности двухъ угловъ.** Примѣнимъ формулу IX къ угламъ  $\alpha$  и  $-\beta$ ; получимъ

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}[\alpha+(-\beta)] &= \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs}(-\beta) + \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn}(-\beta), \quad \text{откуда} \\ \operatorname{sn}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta - \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta. \end{aligned} \quad (X)$$

**66\*. Косинусъ суммы и разности двухъ угловъ.** 1) Съ помощью формулъ приведенія и формулы X найдемъ

$$\begin{aligned} \operatorname{cs}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sn}[90^\circ-(\alpha+\beta)] = \operatorname{sn}[(90^\circ-\alpha)-\beta] \\ &= \operatorname{sn}(90^\circ-\alpha) \cdot \operatorname{cs} \beta - \operatorname{cs}(90^\circ-\alpha) \cdot \operatorname{sn} \beta = \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta - \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta. \end{aligned}$$

$$\text{Итакъ} \quad \operatorname{cs}(\alpha+\beta) = \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta - \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta. \quad (XI)$$

2) Въ полученной формулѣ замѣнимъ  $\beta$  черезъ  $-\beta$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{cs}[\alpha+(-\beta)] &= \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{cs}(-\beta) - \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn}(-\beta); \\ \text{отсюда} \quad \operatorname{cs}(\alpha-\beta) &= \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta + \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta. \end{aligned} \quad (XII)$$

**67. Тангенсъ суммы и разности двухъ угловъ.** 1) Имѣемъ

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)}{\operatorname{cs}(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta + \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta}{\operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta - \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta}.$$

<sup>1)</sup> Абсолютная величина  $m+n$  составляется изъ абсолютныхъ величинъ  $m$  и  $n$  или черезъ сложенеіе, или черезъ вычитаніе.

Чтобы ввести  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{tg} \beta$ , разделим числителя и знаменателя второй дроби на  $\operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta$ ; получимъ

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cs} \alpha} + \frac{\operatorname{sn} \beta}{\operatorname{cs} \beta}}{1 - \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cs} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sn} \beta}{\operatorname{cs} \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}. \quad (\text{XIII})$$

2) Повторяя тотъ же приемъ, получимъ

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}. \quad (\text{XIV})$$

**Замѣчаніе.** Такъ какъ формула XIII выведена изъ общихъ формулъ, то сама обладаетъ общностью, а потому формулу XIV можно получить также изъ формулы XIII, замѣняя  $\beta$  черезъ  $-\beta$ .

**68.** Отъ сложения и вычитанія двухъ угловъ можно послѣдовательно перейти къ сочетанію какого угодно числа слагаемыхъ и вычитаемыхъ угловъ; напримѣръ  
 $\operatorname{sn}(\alpha - \beta + \gamma) = \operatorname{sn}[(\alpha - \beta) + \gamma] = \operatorname{sn}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{cs} \gamma + \operatorname{cs}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{sn} \gamma$ ; далѣе применяемъ формулы X и XII.

**69. Синусъ, косинусъ и тангенсъ двойного угла.** Въ формулахъ для суммы двухъ угловъ полагаемъ  $\beta = \alpha$ ; получимъ

$$\operatorname{sn} 2\alpha = 2 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} \alpha \quad (\text{XV})$$

$$\operatorname{cs} 2\alpha = \operatorname{cs}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \alpha \quad (\text{XVI})$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\text{XVII})$$

**70.** Чтобы разложить тригонометрическія функціи угловъ  $3\alpha$  и  $4\alpha$ , представимъ  $3\alpha$  въ видѣ  $(2\alpha + \alpha)$ , а  $4\alpha$  въ видѣ  $(2 \cdot 2\alpha)$ ; напримѣръ:

$$\begin{aligned} 1) \quad \operatorname{sn} 3\alpha &= \operatorname{sn}(2\alpha + \alpha) = \operatorname{sn} 2\alpha \cdot \operatorname{cs} \alpha + \operatorname{cs} 2\alpha \cdot \operatorname{sn} \alpha \\ &= (2 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} \alpha) \cdot \operatorname{cs} \alpha + (\operatorname{cs}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \alpha) \cdot \operatorname{sn} \alpha = 3 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs}^2 \alpha - \operatorname{sn}^3 \alpha. \end{aligned}$$

Если требуется  $\operatorname{sn} 3\alpha$  выразить только черезъ  $\operatorname{sn} \alpha$ , то замѣнимъ въ послѣдней формулѣ  $\operatorname{cs}^2 \alpha$  посредствомъ  $1 - \operatorname{sn}^2 \alpha$ ; получимъ  
 $\operatorname{sn} 3\alpha = 3 \operatorname{sn} \alpha - 4 \operatorname{sn}^3 \alpha$ .

$$\begin{aligned} 2) \quad \operatorname{sn} 4\alpha &= \operatorname{sn}(2 \cdot 2\alpha) = 2 \operatorname{sn} 2\alpha \cdot \operatorname{cs} 2\alpha \\ &= 2 \cdot (2 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} \alpha) \cdot (\operatorname{cs}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \alpha) = 4 \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs}^3 \alpha - 4 \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn}^3 \alpha. \end{aligned}$$

**71\*.** Нерѣдко бываетъ надобно функціи даннаго угла выразить посредствомъ функцій его половинъ: для этого цѣлое разсматриваемъ какъ удвоенную половину и применяемъ § 69. Напримѣръ:

$$a) \quad \operatorname{sn} \alpha = \operatorname{sn}\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}.$$

$$b) \quad \operatorname{cs} \alpha = \operatorname{cs}\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

**72\*. Синусъ, косинусъ и тангенсъ половины угла** По § 32 и по § 71 b) имѣемъ

$$\begin{cases} \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \\ \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} = \operatorname{cs} \alpha \end{cases}$$

Изъ этой системы получимъ

$$\operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{cs} \alpha}{2} \dots (a) \quad \text{и} \quad \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \operatorname{cs} \alpha}{2} \dots (b),$$

а отсюда  $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{cs} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha} \dots (c).$

Далѣе извлекаемъ корень, при чемъ 1) если знакъ  $\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}$ ,  $\operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  можно узнать заранее, то беремъ только требуемое значеніе корня\*), 2) если же этого нѣтъ, то *одинаково* возможны оба знака передъ корнемъ<sup>1)</sup>.

Итакъ вообще

$$\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cs} \alpha}{2}} \quad (\text{XVIII}) \quad \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cs} \alpha}{2}} \quad (\text{XIX})$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cs} \alpha^{**}}{1 + \operatorname{cs} \alpha}} \quad (\text{XX})$$

\*) Пусть на примѣръ дано  $\operatorname{cs} \alpha = 0,3$  и кромѣ того извѣстно, что  $650^\circ < \alpha < 700^\circ$ . Тогда имѣемъ:  $325^\circ < \frac{\alpha}{2} < 350^\circ$ , слѣдовательно  $\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}$  отрицателенъ,  $\operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$  положителенъ и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  отрицателенъ; такимъ образомъ въ настоящемъ случаѣ:

$$\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - 0,3}{2}} = -\sqrt{0,35}; \quad \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0,3}{2}} = \sqrt{0,65};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{7}{13}}.$$

<sup>1)</sup> Доказательство см. въ «Прибавленіяхъ».

\*\*) Въ этихъ формулахъ черезъ  $\sqrt{\dots}$  обозначено положительное значеніе корня.

Значенія  $\alpha$  при  $+\sqrt{\dots}$  и при  $-\sqrt{\dots}$ , конечно, не одинаковы [ср. § 36 прим. 1 b)].

**Примѣръ.** Найти  $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$  Имѣемъ послѣдовательно

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cs} 45^\circ}{1 + \operatorname{cs} 45^\circ}} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) : \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{2} - 1.$$

**73\*.** Если кромѣ  $\operatorname{cs} \alpha$  данъ еще  $\operatorname{sn} \alpha$ , для опредѣленія  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  удобнѣе иныя формулы: онѣ получатся, если мы, замѣнивъ  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  черезъ  $\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} / \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$ , дополнимъ сначала числителя, а потомъ знаменателя до  $2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$  и примѣнимъ формулу (а) изъ § 71 и формулы (b) и (а) изъ § 72. Итакъ:

$$\text{a) } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sn} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{cs} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha}.$$

**74.** Задачи о выраженіи функцій для  $\frac{\alpha}{3}$ ,  $\frac{\alpha}{4}$  и т. д. съ помощью функцій  $\alpha$  приводятъ къ уравненіямъ *высшихъ* степеней.

Пусть напримѣръ требуется  $\operatorname{sn} \frac{\alpha}{3}$  связать уравненіемъ съ  $\operatorname{sn} \alpha$ .

Замѣнимъ  $\alpha$  черезъ  $\left(3 \cdot \frac{\alpha}{3}\right)$  и воспользуемся § 70 п. 1; получимъ

$$\operatorname{sn} \alpha = \operatorname{sn} \left(3 \cdot \frac{\alpha}{3}\right) = 3 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{3} - 4 \operatorname{sn}^3 \frac{\alpha}{3}. \text{ Означая } \operatorname{sn} \frac{\alpha}{3} \text{ черезъ } x, \text{ будемъ}$$

$$\text{имѣть} \quad x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\operatorname{sn} \alpha = 0.$$



## VI. Приведеніе выраженій къ виду удобному для логариомированія.

**75. Общее замѣчаніе.** Чтобы выраженіе удобно было вычислить съ помощью логариомовъ, оно не должно содержать ни суммъ, ни разностей, кромѣ такихъ, которыя легко найти непосредственно.

Если это условіе не выполнено, то слѣдуетъ данное выраженіе преобразовать, — насколько это возможно и выгодно. Главныя изъ такихъ преобразованій мы и рассмотримъ теперь.

**76. Примѣры.** Начнемъ съ нѣсколькихъ простѣйшихъ случаевъ.

$$1) 1 - \operatorname{sn}^2 25^\circ = \operatorname{cs}^2 25^\circ \quad 2) 1 + \operatorname{tg}^2 70^\circ = \operatorname{sc}^2 70^\circ = 1 : \operatorname{cs}^2 70^\circ$$

$$3) \operatorname{sn}^2 50^\circ - \operatorname{cs}^2 50^\circ = -(\operatorname{cs}^2 50^\circ - \operatorname{sn}^2 50^\circ) = -\operatorname{cs} 100^\circ = \operatorname{sn} 10^\circ$$

$$4) 3 \operatorname{ctg} 20^\circ (1 - \operatorname{tg}^2 20^\circ) = 6 : \frac{2 \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 20^\circ} = 6 : \operatorname{tg} 40^\circ$$

$$5) 1 + \operatorname{cs} \alpha = 2 \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2} \quad (\text{XXI}) \quad 6) 1 - \operatorname{cs} \alpha = 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \quad (\text{XXII})$$

$$7) 1 + \operatorname{sn} 40^\circ = 1 + \operatorname{cs} 50^\circ = 2 \operatorname{cs}^2 25^\circ$$

$$8) \frac{1 - \operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cs} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{cs} (90^\circ - \alpha)}{\operatorname{sn} (90^\circ - \alpha)} = \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

**Замѣчаніе.** Выраженія: 1), 2), 5), 6) и 7) легко вычисляются и въ первоначальномъ видѣ <sup>1)</sup>, но сдѣланныя преобразованія могутъ быть полезны, если эти выраженія сами входятъ въ составъ другихъ (какъ въ примѣрѣ 8).

<sup>\*</sup>) См. § 72.

<sup>\*\*</sup>) См. § 73 b) въ обратномъ переходѣ.

<sup>1)</sup> Возьмемъ на примѣръ  $x = 1 + \operatorname{tg}^2 70^\circ$ . Полагая  $\operatorname{tg}^2 70^\circ = y$ , найдемъ:  
 $\lg y = 2 \lg \operatorname{tg} 70^\circ = 0,87786$ ;  $y = 7,5485$ .

Такимъ образомъ  $x = 1 + y = 8,5485$ .

**77. Преобразование суммы и разности двух синусовъ или косинусовъ.** а) Преобразуемъ  $\sin \alpha + \sin \beta$ . Для этого положимъ

$$\alpha = x + y \quad \text{и} \quad \beta = x - y$$

и применимъ формулы IX и X (§§ 64 и 65); будемъ имѣть:

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin (x + y) + \sin (x - y) = 2 \sin x \cos y;$$

но  $x = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2};$  такимъ образомъ

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{XXIII})$$

Прилагая тотъ же приемъ, получимъ:

$$b) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\text{XXIV})$$

$$c) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (\text{XXV})$$

$$d) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \quad (\text{XXVI})$$

**Примѣры.** 1)  $\sin 100^\circ - \sin 16^\circ = 2 \sin \frac{100^\circ - 16^\circ}{2} \cdot \cos \frac{100^\circ + 16^\circ}{2}$   
 $= 2 \sin 42^\circ \cdot \cos 58^\circ$

2)  $\cos 12^\circ - \cos 60^\circ = 2 \sin 36^\circ \cdot \sin 24^\circ$

3)  $\cos 50^\circ + \sin 70^\circ = \sin 40^\circ + \sin 70^\circ = 2 \sin 55^\circ \cdot \cos 15^\circ$

4)  $\sin \alpha + \cos \alpha = \sin \alpha + \sin (90^\circ - \alpha) = 2 \sin 45^\circ \cdot \cos (45^\circ - \alpha) =$   
 $= \sqrt{2} \cdot \cos (45^\circ - \alpha)$

**78. Преобразование суммы и разности двухъ тангенсовъ или котангенсовъ.** Чтобы преобразовать выраженія:

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta, \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta, \quad \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta,$$

сначала переходимъ на синусъ и косинусъ; напримѣръ:

$$a) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

\*) По § 37  $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -\sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ . Формула XXVI читается такъ:  
 разность двухъ косинусовъ равна удвоенному произведенію синуса полу-  
 суммы угловъ на синусъ *обратной* полуразности ихъ.

$$b) \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{cs} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha} - \frac{\operatorname{cs} \beta}{\operatorname{sn} \beta} = \frac{\operatorname{sn} (\beta - \alpha)}{\operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta}$$

$$c) \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cs} \alpha} - \frac{\operatorname{cs} \beta}{\operatorname{sn} \beta} = -\frac{\operatorname{cs} (\alpha + \beta)}{\operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta}.$$

**79. Некоторые болѣе сложные выраженія.** Преобразуемъ  $\frac{\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} \beta}{\operatorname{sn} \alpha - \operatorname{sn} \beta}$  и  $\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \beta$ .

$$a) \quad \frac{\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} \beta}{\operatorname{sn} \alpha - \operatorname{sn} \beta} = \frac{1) 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \operatorname{sn} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\operatorname{sn} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{cs} \frac{\alpha + \beta}{2}} : \frac{\operatorname{sn} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{cs} \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$\text{Отсюда} \quad \frac{\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} \beta}{\operatorname{sn} \alpha - \operatorname{sn} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}} \quad (\text{XXVII})$$

$$b) \quad \operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \beta = (\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} \beta) (\operatorname{sn} \alpha - \operatorname{sn} \beta) = \left( 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \times \\ \left( 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 2) \left( 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \left( 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Примѣняя теперь § 69, получимъ

$$\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \beta = \operatorname{sn} (\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sn} (\alpha - \beta) \quad (\text{XXVIII})$$

**80.** Преобразуемъ  $\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} \beta + \operatorname{sn} \gamma$ , если  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .\*).

Имѣемъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} \beta + \operatorname{sn} \gamma &= \operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} \beta + \operatorname{sn} (\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &+ 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha + \beta}{2} \left( \operatorname{cs} \frac{\alpha + \beta}{2} + \operatorname{cs} \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot 2 \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\beta}{2} = 2 \operatorname{cs} \frac{\gamma}{2} \cdot 2 \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

1) По § 77.

2) Группируя множители иначе.

\*) Таковы напримѣръ углы треугольника; таковы же углы:  
 $\alpha = 400^\circ$ ,  $\beta = -320^\circ$  и  $\gamma = 100^\circ$ , и т. д.

\*\*)  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ , слѣдовательно  $\operatorname{sn} \gamma = \operatorname{sn} (\alpha + \beta)$ .

\*\*\*)  $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ ,  $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ ; слѣдовательно  $\operatorname{sn} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{cs} \frac{\gamma}{2}$ .

Итакъ, если  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , то

$$\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} \beta + \operatorname{sn} \gamma = 4 \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\gamma}{2}. \quad (\text{XXIX})$$

*Замѣчаніе.* Обращаемъ вниманіе на существенное отличіе этой формулы отъ выведенныхъ ранѣе: тѣ обладаютъ общностью, тогда какъ формула XXIX содержитъ только частный случай.

**81. Введеніе вспомогательнаго угла.** Приводя выраженіе къ логарифмическому виду, иногда бываетъ выгодно нѣкоторыя числа замѣнить тригонометрическими функціями угловъ. Вотъ нѣсколько такихъ случаевъ.

$$1) \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \operatorname{sn} 18^\circ} = \sqrt{\operatorname{sn} 18^\circ}$$

$$2) \sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{\operatorname{tg} 22^\circ 30'}$$

$$3) 1 + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sn} (45^\circ + \alpha)}{\operatorname{cs} 45^\circ \cdot \operatorname{cs} \alpha}$$

4)  $1 + \operatorname{sn} \alpha + \operatorname{cs} \alpha = \operatorname{sn} 90^\circ + \operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} (90^\circ - \alpha)$ ; такъ какъ во второй части сумма угловъ равна  $180^\circ$ , то примѣнимъ формулу XXIX; тогда:

$$1 + \operatorname{sn} \alpha + \operatorname{cs} \alpha = 4 \operatorname{cs} 45^\circ \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

5) Чтобы преобразовать  $\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{cs} \alpha$ , умножаемъ и дѣлимъ это выраженіе на  $\sqrt{2}$  и пользуемся тѣмъ, что  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{sn} 45^\circ = \operatorname{cs} 45^\circ$ ; получимъ

$$\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{cs} \alpha = \sqrt{2} (\operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} 45^\circ + \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn} 45^\circ) = \sqrt{2} \cdot \operatorname{sn} (\alpha + 45^\circ).$$

$$6) 1 + 2 \operatorname{sn} 50^\circ = 2 \left( \frac{1}{2} + \operatorname{sn} 50^\circ \right) = 2 (\operatorname{sn} 30^\circ + \operatorname{sn} 50^\circ) = 4 \operatorname{sn} 40^\circ \cdot \operatorname{cs} 10^\circ.$$

$$7) \operatorname{sn}^2 \alpha - 3 \operatorname{cs}^2 \alpha = \operatorname{cs}^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha - 3) = \operatorname{cs}^2 \alpha (\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 60^\circ) = \\ = \operatorname{cs}^2 \alpha \cdot \frac{\operatorname{sn} (\alpha + 60^\circ) \cdot \operatorname{sn} (\alpha - 60^\circ)}{\operatorname{cs}^2 \alpha \cdot \operatorname{cs}^2 60^\circ} = 4 \operatorname{sn} (\alpha + 60^\circ) \operatorname{sn} (\alpha - 60^\circ).$$

**82.** Пусть будутъ  $A$  и  $B$  два выраженія порознь удобныя для логарифмовъ; допустимъ еще, что они имѣютъ положительное значеніе. Требуется преобразовать  $A+B$  и  $A-B$ .

Здѣсь иногда бываетъ выгодно ввести вспомогательный уголъ; разсмотримъ этотъ способъ.

I. Случай  $A+B$ . Имѣемъ  $A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)$ ; полагаемъ теперь  $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}^2\varphi^*$ ; это возможно, такъ какъ  $\frac{B}{A}$  положительно, а по абсолютной величинѣ для тангенса не требуется ограниченіе.

$$\text{Тогда } A+B=B(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=A\cdot\sec^2\varphi=\frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

II. 1) Случай  $A-B$  при условіи  $A>B$ . Имѣемъ  $A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right)$ ; такъ какъ  $\frac{B}{A}$  положительно и менѣе единицы, то можно принять  $\frac{B}{A}=\operatorname{sn}^2\varphi$ , послѣ чего получимъ

$$A-B=A(1-\operatorname{sn}^2\varphi)=A\cdot\operatorname{cs}^2\varphi.$$

2. Случай  $A-B$  при условіи  $A<B$ . Имѣемъ  $A-B=-(B-A)$ ; такъ какъ  $B>A$ , то преобразование сводится къ предыдущему.

**Примѣръ.** Вычислить  $x=\sqrt{\operatorname{tg}^2 50^\circ - \operatorname{sn}^2 20^\circ}$ .

а) По только что изложенному находимъ

$$x=\sqrt{\operatorname{tg}^2 50^\circ \cdot \operatorname{cs}^2\varphi}=\operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{cs} \varphi, \text{ при чемъ } \varphi \text{ опредѣляется изъ}$$

$$\text{условія } \operatorname{sn}^2\varphi=\frac{\operatorname{sn}^2 20^\circ}{\operatorname{tg}^2 50^\circ} \text{ или } \operatorname{sn} \varphi=\frac{\operatorname{sn} 20^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ}.$$

б) Произведемъ логарифмическое вычисленіе.

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} \lg \operatorname{sn} \varphi = \lg \operatorname{sn} 20^\circ - \lg \operatorname{tg} 50^\circ \\ - \lg \operatorname{sn} 20^\circ = 9,53405 - 10 \\ \lg \operatorname{tg} 50^\circ = 0,07619 \\ \hline \lg \operatorname{sn} \varphi = 9,45786 - 10 \\ \varphi = 16^\circ 40' 39'' \end{array} & \begin{array}{l} \lg x = \lg \operatorname{tg} 50^\circ + \lg \operatorname{cs} \varphi \\ \lg \operatorname{tg} 50^\circ = 0,07619 \\ + \lg \operatorname{cs} \varphi = 9,98133 - 10 \\ \hline \lg x = 0,05752 \\ x = 1,14161. \end{array} \end{array}$$

83. Приведемъ къ логарифмическому виду корни уравненія

$$x^2 - ax + b = 0,$$

предполагая, что  $a$  и  $b$  положительны и корни уравненія дѣйстви-  
тельны. Рѣшивъ данное уравненіе, получимъ

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

\*)  $\varphi$  означаетъ здѣсь *табличный* уголъ.

Преобразуемъ подкоренную разность:  $\frac{a^2}{4} - b = \frac{a^2}{4} \left(1 - \frac{4b}{a^2}\right)$ ; такъ какъ  $b$  положительно и корни уравненія дѣйствительны, то  $0 < \frac{4b}{a^2} < 1$ ; поэтому можно принять  $\frac{4b}{a^2} = \operatorname{sn}^2 \varphi$ , послѣ чего будемъ имѣть  $\frac{a^2}{4} - b = \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{cs}^2 \varphi$ .

Такимъ образомъ приходимъ къ выраженію

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \cdot \operatorname{cs} \varphi^*)$$

отсюда, вынося  $\frac{a}{2}$  за скобки и применяя § 76, найдемъ:

$$x_1 = \frac{a}{2} (1 + \operatorname{cs} \varphi) = a \cdot \operatorname{cs}^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$x_2 = \frac{a}{2} (1 - \operatorname{cs} \varphi) = a \cdot \operatorname{sn}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

\*) Знакъ  $\sqrt{\quad}$  въ преобразуемой формулѣ имѣетъ смыслъ абсолютной величины, поэтому, если  $a$  положительно и  $\varphi$  уголь табличный, то

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{cs}^2 \varphi} = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{cs} \varphi.$$

## VII. Попятіе о составленіи тригонометрическихъ таблицъ.

84. Покажемъ, что для всякаго угла можно вычислить тригонометрическія функціи — съ желаемой степенью точности.

Тригонометрическія функціи всякаго угла приводятся къ функціямъ положительнаго угла не превышающаго  $45^\circ$ ; всѣ тригонометрическія функціи можно вычислить по одной изъ нихъ, напр. по синусу; изъ этого слѣдуетъ, что для нашей цѣли достаточно указать способъ, какимъ можно было бы вычислить синусъ каждаго изъ угловъ, содержащихся между 0 и  $45^\circ$ .

Одинъ изъ способовъ основанъ на томъ, что при *очень маломъ* углѣ можно безъ значительной погрѣшности <sup>1)</sup> *перпендикуляръ* замѣнить *дугою* и такимъ образомъ воспользоваться *готовымъ* значеніемъ  $\pi^*$ ); по этому способу мы начнемъ вычисленіе съ *достаточно малой доли* даннаго угла и будемъ уголъ увеличивать постепенно, примѣняя формулы, выведенныя для двойнаго угла и суммы угловъ.

<sup>1)</sup> Доказательство этого будетъ приведено ниже.

<sup>2)</sup> Пусть на примѣръ на чертежѣ 39 уголъ  $\alpha = 10'$ . По опредѣленію синуса имѣемъ  $\sin \alpha = \frac{BC}{R}$ ; указанный же способъ состоитъ въ томъ, что

вмѣсто  $\frac{BC}{R}$  мы беремъ  $\frac{\text{дуга } AB}{R}$ . Для вычисленія этого отношенія имѣемъ:

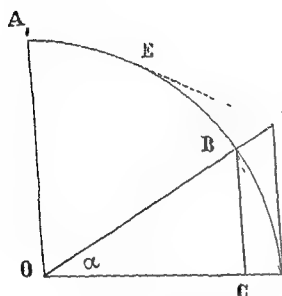
$$\text{дуга } AB = \frac{2\pi R \cdot 10}{360 \cdot 60} = \frac{\pi R}{1080}, \text{ откуда } \frac{\text{дуга } AB}{R} = \frac{\pi}{1080};$$

пользуясь значеніемъ  $\pi$  (см. примѣч. къ § 7), получимъ

$$\frac{\text{дуга } AB}{R} = 0,002\,908\,882 \dots$$

85. Для сужденія о погрѣшности начального вычисленія можетъ служить слѣдующая теорема.

**Теорема.** Если уголъ заключается между 0 и  $90^\circ$ , то отношеніе дуги къ радиусу превышаетъ синусъ меньше, чѣмъ на четверть своего куба.



Черт. 39.

**Доказательство.** I. Покажемъ сперва, что при положительномъ остромъ углѣ отношеніе дуги къ радиусу болѣе синуса и менѣе тангенса.

Сравнимъ дугу  $AB$  съ перпендикуляромъ  $BC$  и касательной  $AD$  (черт. 39). Проведя для этого хорду  $AB$  и касательную  $DE$ , найдемъ: 1) перпендикуляръ  $BC$  менѣе дуги  $AB$ , такъ какъ онъ менѣе ея хорды, и 2) дуга  $AB$  менѣе касательной  $AD$ , потому что дуга  $AE$  менѣе объемлющей ломаной  $ADE$ . Такимъ образомъ

$$BC < \overset{\frown}{AB} < AD.$$

Раздѣливъ эти линіи на  $R$  и означая отношеніе дуги къ радиусу черезъ  $a$ , будемъ имѣть

$$\sin \alpha < a < \operatorname{tg} \alpha^*).$$

II. Доказано, что  $a > \sin \alpha$ . Чтобы изслѣдовать  $a - \sin \alpha$ , сдѣлаемъ сначала слѣдующее преобразование:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

Теперь въ послѣднемъ выраженіи замѣнимъ

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ и } \sin \frac{\alpha}{2} \text{ черезъ } \frac{a}{2};$$

такъ какъ по доказанному раньше

$$\frac{a}{2} < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ и } \frac{a}{2} > \sin \frac{\alpha}{2},$$

\* ) При линейномъ измѣреніи угла это неравенство приметъ видъ:  
 $\sin \alpha < a < \operatorname{tg} \alpha.$



то выражение уменьшится<sup>1)</sup>, и мы получим *неравенство*

$$\operatorname{sn} \alpha > 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{4}\right),$$

а отсюда

$$a - \operatorname{sn} \alpha < \frac{a^3}{4}.$$

*Примѣръ.* Пусть  $\alpha = 10'$ ; тогда  $a = 0,002\,908\,882 \dots$  (см. примѣч. къ § 84); чтобы упростить изслѣдованіе, замѣтимъ, что въ настоящемъ случаѣ  $a < 0,003$ ; пользуясь этимъ неравенствомъ, получимъ изъ доказаннаго выше

$$0,002\,908\,882 \dots - \operatorname{sn} 10' < 0,25 \cdot (0,003)^3 \text{ или}$$

$$0,002\,908\,882 \dots - \operatorname{sn} 10' < 0,000\,000\,006\,75;$$

отсюда  $0,002\,908\,882 \dots - \operatorname{sn} 10' < 0,000\,000\,01$ ; слѣдов.  
 $\operatorname{sn} 10' = 0,0029088 \dots$  съ 7 вѣрными десятичными знаками.

86. Въ § 84 мы предполагали для косинуса исходнаго угла вычисленіе по формулѣ  $\operatorname{cs} \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \alpha}$ ; но *практически* проще иной способъ. Приводимъ его.

Исходимъ изъ того, что  $\operatorname{cs} \alpha$  выражается *рационально* черезъ

$$\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}, \text{ а именно } \operatorname{cs} \alpha = 1 - 2 \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2} \quad (\S\ 72).$$

Для  $\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}$  имѣемъ по предыдущему

$$\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} < \frac{a}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a}{2} - \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{4} \left(\frac{a}{2}\right)^3;$$

$$\text{отсюда} \quad \frac{a}{2} > \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} > \frac{a}{2} - \frac{a^3}{32};$$

Теперь въ выраженіи  $\operatorname{cs} \alpha$  подставимъ вмѣсто  $\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}$  сначала  $\frac{a}{2}$ , а потомъ  $\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}$ ; въ первомъ случаѣ выраженіе уменьшится,

<sup>1)</sup> Такъ какъ  $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ , то  $\frac{a}{2} < \frac{\pi}{4}$ , поэтому  $1 - \frac{a^2}{4}$  положительно.

Такимъ образомъ послѣ подстановки получились множители также *положительные*; а потому произведенія можно сравнить по величинѣ отдѣльныхъ множителей

а во второмъ увеличится; слѣдовательно получимъ

$$\cos \alpha > 1 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad \cos \alpha < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)^2$$

$$\text{или} \quad \cos \alpha > 1 - \frac{a^2}{2} \quad \text{и} \quad \cos \alpha < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{a^6}{512}.$$

Въ послѣднемъ неравенствѣ можно опустить  $-\frac{a^6}{512}$ , такъ какъ отъ этого вторая часть еще болѣе превзойдетъ первую.

$$\text{Итакъ} \quad \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) < \cos \alpha < \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^4}{16}.$$

Отсюда видно, что для  $\cos \alpha$  можно принять величину  $1 - \frac{a^2}{2}$ , — съ ошибкою менѣе, чѣмъ на  $\frac{a^4}{16}$ .

**87.** Примѣняя способы, указанные выше (съ нѣкоторыми упрощеніями), можно составить такъ называемыя *таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ*<sup>1)</sup>; а взявъ логарифмы найденныхъ чиселъ, получимъ тѣ логарифмическія таблицы, которыми обыкновенно пользуются въ тригонометрическихъ вычисленіяхъ.

*Замѣчаніе.* Въ предыдущемъ только доказана возможность составленія тригонометрическихъ таблицъ. Относительно того, какъ онѣ были составлены въ действительности, замѣтимъ лишь, что примѣненные способы были весьма сложны<sup>2)</sup>.

Въ настоящее же время, — если бы понадобилось составить новыя таблицы, — всего удобнѣе пользоваться тѣми формулами, которыя даетъ высшая математика.

<sup>1)</sup> Слово «натуральныхъ» присоединяется, чтобы отличить эти таблицы отъ обыкновенныхъ, гдѣ тригонометрическія величины логарифмированы.

<sup>2)</sup> Подробнѣе объ этомъ можно найти напр. въ «Очеркѣ истории плоской тригонометрии», приложенномъ къ учебнику тригонометрии Г. Тиме.

# О РѢШЕНІИ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

(Тригонометрія.)

---

НѢКОТОРЫЯ ОБЩІЯ ЗАМѢЧАНІЯ О РѢШЕНІИ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

**88.** О тригонометрическомъ рѣшеніи треугольниковъ (о *вычисленіи* треугольниковъ) было уже сказано въ §§ 1 и 3. Теперь укажемъ подробнѣе, какія могутъ быть данныя при рѣшеніи треугольниковъ и какія требованія можно предъявлять къ самому рѣшенію.

Обыкновенный, — *практический*<sup>1)</sup>, — случай состоитъ въ томъ, что въ тр-кѣ пзвѣстны нѣкоторые стороны и углы и требуется вычислить остальные стороны и углы. Если же разсматривать вопросъ независимо отъ практическихъ приложений, то данными будутъ служить не только стороны и углы, но и другія величины<sup>2)</sup>, а также и различныя соотношенія между ними<sup>3)</sup>.

Въ задачахъ на рѣшеніе треугольниковъ словами «рѣшить треугольникъ» выражаютъ обыкновенно требованіе опредѣлить неизвѣстныя стороны и углы, а иногда и площадь; но къ отдѣлу о рѣшеніи треугольниковъ относятъ также и тѣ задачи, гдѣ опредѣляемые элементы иные, чѣмъ стороны и углы.

**89.** Отъ поставленнаго требованія зависитъ *число* данныхъ: для *полнаго* рѣшенія треугольника<sup>4)</sup> данныхъ должно быть *три* и они

---

<sup>1)</sup> Напримѣръ въ *геодезии* (т.-е. при измѣреніяхъ на мѣстности).

<sup>2)</sup> Напримѣръ. высота тр-ка, периметръ, радиусъ описаннаго круга, площадь гр-ка, какой-либо объемъ, связанный съ гр-номъ, и т. д.

<sup>3)</sup> Напримѣръ условіе, что въ искомомъ тр-кѣ квадратъ стороны равенъ произведенію двухъ другихъ сторонъ, и т. п.

<sup>4)</sup> Т.-е. для возможности опредѣлить *каждый* элементъ тр-ка.

должны быть *независимы* между собой<sup>1)</sup>; если же надо опредѣлить только нѣкоторые элементы, то данныхъ можетъ быть и менѣе трехъ<sup>2)</sup>.

**90.** Что касается *формы* рѣшенія, то слѣдуетъ различать задачи числовыя и буквенныя:

1) Въ числовыхъ задачахъ каждый результатъ долженъ быть представленъ также числомъ; при этомъ отъ способа рѣшенія требуется, чтобы онъ былъ кратокъ и возможно точенъ<sup>3)</sup>. Правильность вычисления контролируютъ иногда особыми повѣрками: такъ, вычисляютъ одну и ту же величину по двумъ различнымъ формуламъ и т. п.

2) Въ буквенныхъ задачахъ можно требовать:

а) выразить искомыя величины *только черезъ данныя*, — хотя бы полученныя формулы и не были удобны для вычисления;

б) составить формулы *удобныя для вычисления*, — хотя бы эти формулы и не выражали искомыхъ величинъ съ помощью данныхъ, а представляли лишь *послѣдовательное* рѣшеніе<sup>4)</sup>.

Удовлѣворить обоимъ требованіямъ *вмѣстѣ* не всегда удается; въ такихъ случаяхъ будемъ указывать тотъ и другой способъ отдѣльно, или же только *второй* способъ. Наконецъ иногда будемъ ограничиваться только главными пунктами въ рѣшеніи.

<sup>1)</sup> Примѣромъ данныхъ зависимыхъ между собой могутъ служить три угла тр-ка: сумма ихъ должна составлять  $180^\circ$ , слѣдов. третій уголъ зависитъ отъ двухъ другихъ. Углы тр-ка опредѣляютъ только его *форму* (даютъ безконечнымъ рядъ *подобныхъ* треугольниковъ).

Возьмемъ еще соотношение сторонъ

$$a : b : c = 5 : 6 : 7.$$

Оно разлагается на три пропорціи:

$$a : b = 5 : 6, \quad b : c = 6 : 7 \quad \text{и} \quad a : c = 5 : 7;$$

но третья пропорція есть слѣдствие двухъ другихъ; такимъ образомъ взятое соотношение содержитъ *два* независимыхъ условия. Оно также предѣляетъ только *форму* треугольника.

<sup>2)</sup> Напримѣръ, чтобы опредѣлить радиусъ описаннаго круга, достаточно знать сторону и противолежащій уголъ.

<sup>3)</sup> Напомнимъ, что вычисленіе производится обыкновенно при помощи логарифмовъ, слѣдов. только приближенно.

<sup>4)</sup> Т-е такое, гдѣ искомыя величины выражены не только черезъ данныя, но и черезъ другія величины, найденныя ранѣе. Неудобство такого рѣшенія — возможность накопленія погрѣшностей въ вычисленіи.

## VIII. Прямоугольные треугольники.

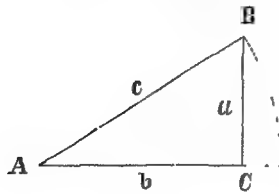
**Соотношенія между элементами прямоугольнаго треугольника.** Означимъ въ прямоугольномъ треугольникѣ черезъ  $A$  и  $B$  острые углы и черезъ  $C$  прямой уголъ <sup>1)</sup>; пусть далѣе числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  выражаютъ длину сторонъ <sup>2)</sup> относительно *общей* единицы.

**91\*.** Для сторонъ прямоугольнаго тр-ка геометрія даетъ соотношение  $a^2 + b^2 = c^2$ , а для острыхъ угловъ:  $A + B = 90^\circ$ .

Зависимость между острыми углами *тригонометрически* выразится въ томъ, что функціи одного угла равны родственнымъ функціямъ другого (§ 39 п. 3); напимѣръ:

$$\sin A = \sin(90^\circ - B) = \cos B; \quad \operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} A; \quad \text{и т. д.}$$

**92\*.** I. Сдѣлаемъ уголъ  $A$  центральнымъ, описавъ между его сторонами дугу радіусомъ  $c$ . Тогда по § 17 будемъ имѣть



Черт. 40.

$$\frac{a}{c} = \sin A \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{b}{c} = \cos A \quad (2)$$

т.-е. отъ дѣленія катета на гипотенузу получается: 1) синусъ остраго угла, если дѣлится *противолежащій*\*) катетъ, или 2) косинусъ остраго угла,

если дѣлится *прилежащій* катетъ.

II. Дѣля равенство (1) на (2) и обратно, найдемъ

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A \quad (3) \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A \quad (4)$$

т.-е. отъ дѣленія катета на катетъ получается: 1) тангенсъ остраго угла, если дѣлится *противолежащій* катетъ, или 2) котангенсъ остраго угла, если дѣлится *прилежащій* катетъ.

**93.** На основаніи сказаннаго легко выразить сторону въ зависимости отъ другой стороны и остраго угла. Напимѣръ:

<sup>1)</sup> Подъ  $A$ ,  $B$  и  $C$  слѣдуетъ понимать градусныя выраженія угловъ.

<sup>2)</sup> Противолежащихъ означеннымъ угламъ.

\*) Упомянутому острому углу.

Для выражения  $c$  через  $a$  и  $B$  имѣемъ

$$\frac{a}{c} = \cos B, \quad \text{откуда} \quad c = \frac{a}{\cos B}.$$

Для выражения  $b$  через  $a$  и  $A$  имѣемъ:

$$1) \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A, \quad \text{откуда} \quad b = a \cdot \operatorname{ctg} A, \quad \text{или}$$

$$2) \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A, \quad \text{откуда} \quad b = a : \operatorname{tg} A; \quad \text{и т. д.}$$

**Замѣчаніе.** Полезно запомнить результаты, указанные въ § 61, и еще слѣдующіе два, вытекающіе изъ равенствъ (3) и (4) § 92:

1) Катетъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ угла, противолежащаго первому катету.

2) Катетъ равенъ другому катету, умноженному на котангенсъ угла, прилежащаго къ первому катету.

**Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ.**

**94. 1-й случай.** Даны гипотенуза и острый уголъ ( $c$  и  $A$ ).

**Рѣшеніе.** I. Выраженіе искомыхъ величинъ<sup>1)</sup> съ помощью данныхъ:

$$B = 90^\circ - A; \quad a = c \cdot \sin A; \quad b = c \cdot \cos A$$

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{c^2}{2} \cdot \sin A \cdot \cos A = \frac{c^2}{4} \sin 2A.$$

II. Числовой примѣръ:  $c = 857$ ;  $A = 32^\circ 40' 15''$ .

$$\text{Вычисленіе:} \quad B = 90^\circ - A = 57^\circ 19' 45''$$

$a = c \cdot \sin A$ $\lg c = 2,93298$ $+ \lg \sin A = 9,73224 - 10$ <hr style="width: 100%;"/> $\lg a = 2,66522$ $a = 462,611$	$b = c \cdot \sin B^*)$ $\lg c = 2,93298$ $+ \lg \sin B = 9,92520 - 10$ <hr style="width: 100%;"/> $\lg b = 2,85818$ $b = 721,4$
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: right; margin-right: 10px;"> <math>S = \frac{ab}{2}</math> </div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <math>\lg a = 2,66522</math>  <math>+ \lg b = 2,85818</math>  <hr style="width: 100%;"/> <math>\lg 2 S = 5,52340</math> </div> </div>	
$2 S = 333731; \quad S = 166866.$	

<sup>1)</sup> Т.-е. угла  $B$ , катетовъ  $a$  и  $b$  и площади  $S$ .

<sup>\*)</sup> Для однообразія вмѣсто  $b = c \cdot \cos A$  лучше взять  $b = c \cdot \sin B$ ; точность вычисленія останется та же самая.

**95. 2-й случай.** Даны катетъ и острый уголъ ( $a$  и  $A$ ).

*Рѣшеніе.* I. Выраженіе искомымъ величинъ съ помощью данныхъ:

$$B = 90^\circ - A; \quad \frac{a}{c} = \operatorname{sn} A, \quad \text{откуда} \quad c = \frac{a}{\operatorname{sn} A};$$

$$b = a \cdot \operatorname{ctg} A \quad \text{или} \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}; \quad S = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot \operatorname{ctg} A.$$

II. Числовой примѣръ:  $a = 982$ ;  $A = 63^\circ 21' 45''$ .

*Вычисленіе.*  $B = 90^\circ - A = 26^\circ 38' 15''$

$c = \frac{a}{\operatorname{sn} A}$ $\begin{array}{r} \lg a = 2,99211 \\ - \lg \operatorname{sn} A = 9,95127 - 10 \\ \hline \lg c = 3,04084 \\ c = 1098,6 \end{array}$	$b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}$ $\begin{array}{r} \lg a = 2,99211 \\ - \lg \operatorname{tg} A = 0,29966 \\ \hline \lg b = 2,69245 \\ b = 492,55 \end{array}$
--	---

Площадь  $S$  вычисляется такъ же, какъ въ § 94 (т.-е. по формулѣ  $\lg 2S = \lg a + \lg b$ ); получимъ  $S = 241839$ .

**96. 3-й случай.** Даны гипотенуза и катетъ ( $c$  и  $a$ ).

*Рѣшеніе.* I. Выраженіе искомымъ величинъ съ помощью данныхъ:

$$\operatorname{sn} A = \frac{a^*}{c}; \quad \operatorname{cs} B = \frac{a}{c}; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}; \quad S = \frac{a}{2} \sqrt{c^2 - a^2}.$$

II. Числовой примѣръ:  $c = 58,5$ ;  $a = 47,54$ .

*Вычисленіе.* Первый способъ.

$\operatorname{sn} A = \frac{a}{c}$ $\begin{array}{r} \lg a = 1,67706 \\ - \lg c = 1,76716 \\ \hline \lg \operatorname{sn} A = 9,90990 - 10 \\ A = 54^\circ 21' 20'' \\ B = 35^\circ 38' 40'' \end{array}$	$b = c \cdot \operatorname{sn} B$ $\begin{array}{r} \lg c = 1,76716 \\ + \lg \operatorname{sn} B = 9,76548 - 10 \\ \hline \lg b = 1,53264 \\ b = 34,0908 \end{array}$
--	---

Площадь  $S$  вычисляется такъ же, какъ въ § 94.

---

\*) Выразить самый уголъ съ помощью данныхъ мы не можемъ.

*Другой способъ.* По предыдущему  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$ ; далѣе возьмемъ формулу  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}}$  и подставимъ сюда  $\cos B = \frac{a}{c}$ : получимъ  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$ ; уголъ  $A$  опредѣлимъ по найденному  $B$ .

Произведемъ вычисленіе по этому способу.

$c = 58,5$	$c - a = 10,96$
$a = 47,54$	$c + a = 106,04$
$\lg(c-a) = 1,03981$	
$\lg(c+a) = 2,02547$	
$2 \lg b = 3,06528; \lg b = 1,53264; b = 34,0908$	
$2 \lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 9,01434 - 10; \lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 9,50717 - 10;$	
$\frac{B}{2} = 17^\circ 49' 20''; B = 35^\circ 38' 40''$	
$A = 54^\circ 21' 20''$	

*Замѣчаніе.* Формулой  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$  необходимо пользоваться, если  $a$  близко къ  $c$ , такъ какъ въ этомъ случаѣ по формулѣ  $\frac{a}{c} = \sin A = \cos B$  уголъ опредѣлится недостаточно точно.

**97. 4-й случай.** Даны оба катета ( $a$  и  $b$ ).

*Рѣшеніе.* I. Выраженіе искомымъ величинъ съ помощью данныхъ:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}; c = \sqrt{a^2 + b^2}; S = \frac{ab}{2}.$$

II. Числовой примѣръ:  $a = 2,3214; b = 3,8947$ .

*Вычисленіе.*

$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$	$c = \frac{a}{\sin A}$
$\lg a = 0,36575$	$\lg a = 0,36575$
$\lg b = 0,59048$	$\lg \sin A = 9,70926 - 10$
$\lg \operatorname{tg} A = 9,77527 - 10$	$\lg c = 0,65649$
$A = 30^\circ 47' 47''$	$c = 4,5341$
$B = 59^\circ 12' 13''$	



Вычисляя  $S = \frac{ab}{2}$ , получим  $S = 4,52067$ .

*Замѣчаніе.* Иногда для вычисленія  $c$  удобна также формула  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Пусть напр.  $a = 400$  и  $b = 503$ ; тогда легко найти непосредственно:  $a^2 = 160000$ ,  $b^2 = 253009$  и слѣд.  $c = \sqrt{413009}$ .

Примѣняя теперь логарифмы, получимъ:

$$\lg c = 2,80798; c = 642,657.$$

Нѣкоторые болѣе сложные случаи рѣшенія прямоугольных треугольниковъ.

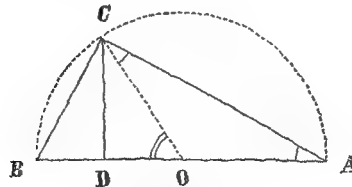
**98. Задача 1.** Даны гипотенуза и отношеніе катетовъ ( $c$ ,  $a : b = m : n$ ).

*Рѣшеніе.* Имѣемъ  $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ ; но  $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A$ ; такимъ образомъ  $\operatorname{tg} A = \frac{m}{n}$ . Опредѣливъ отсюда  $A$ , поступаемъ далѣе какъ въ § 94.

**99. Задача 2.** Даны гипотенуза и соответствующая ей высота ( $c$  и  $h$ ).

*Рѣшеніе. 1-й способъ.* Имѣемъ систему уравненій:  $h = b \cdot \sin A$  и  $b = c \cdot \cos A$ . Исключивъ  $b$ , получимъ  $h = c \cdot \sin A \cdot \cos A = \frac{c}{2} \cdot \sin 2A$ ; отсюда  $\sin 2A = \frac{2h}{c}$ . Опредѣливъ  $2A$ \*) и затѣмъ  $A$ , поступаемъ далѣе какъ въ § 94.

*2-й способъ.* Пусть будетъ  $ABC$  (черт. 41) искомый треугольникъ.



Черт. 41.

Воспользуемся тѣмъ, что гипотенуза служитъ діаметромъ описанной окружности. Пусть будетъ  $O$  середина гипотенузы; соединивъ  $C$  и  $O$ , найдемъ:  $CD = CO \cdot \sin \angle COD$  или  $h = \frac{c}{2} \cdot \sin 2A$ ,

откуда  $\sin 2A = \frac{2h}{c}$ , и т. д.

\*) Такъ какъ  $0 < A < 90^\circ$ , то  $0 < 2A < 180^\circ$ ; а въ этихъ границахъ синусъ даетъ два угла:  $2A_1 = \varphi$  и  $2A_2 = 180^\circ - \varphi$ . Но легко убѣдиться, что при обоихъ углахъ форма треугольника будетъ одинакова; поэтому для задачи достаточно взять  $2A_1 = \varphi$ .

3-й способъ. Имѣемъ уравненія:  $a^2 + b^2 = c^2$  и  $ab = ch$ . Изъ нихъ получимъ  $(a+b)^2 = c^2 + 2ch$  и  $(a-b)^2 = c^2 - 2ch$ ; отсюда:  $a+b = \sqrt{c(c+2h)}$  и  $a-b = \sqrt{c(c-2h)}$  \*). Вычисливъ  $a+b$  и  $a-b$ , найдемъ затѣмъ  $a$  и  $b$ ; и т. д.

*Замѣчаніе.* Изъ построенія видно, что задача невозможна, если  $h > \frac{c}{2}$ . Тригонометрически это выразится въ томъ, что получимъ  $\sin 2A > 1$  (или  $\lg \sin 2A > 0$ ); а при 3-мъ способѣ — въ томъ, что получимъ для  $a-b$  мнимое значеніе.

**100. Задача 3.** Даны острый уголъ и сумма гипотенузы съ катетомъ ( $A$ ,  $c+b=m$ ).

*Рѣшеніе.* Имѣемъ:  $c+b=m$  и  $b=c \cdot \cos A$ ;

отсюда:  $c(1+\cos A)=m$ ;  $c = \frac{m}{1+\cos A} = m : 2 \cos^2 \frac{A}{2}$ .

Далѣе:  $b=m-c$ ;  $a=c \cdot \sin A = \left(m : 2 \cos^2 \frac{A}{2}\right) \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = m \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ ;  $B=90^\circ - A$ .

Подобнымъ же приемомъ рѣшается прямоугольный треугольникъ по острому углу и разности между гипотенузой и катетомъ.

**101. Задача 4.** Даны острый уголъ и сумма катетовъ ( $A$ ,  $a+b=m$ ).

*Рѣшеніе.* Въ уравненіи  $a+b=m$  выразимъ катеты съ помощью гипотенузы и угла  $A$ ; получимъ послѣдовательно:

$$c \cdot \sin A + c \cdot \cos A = m; \quad c[\sin A + \sin(90^\circ - A)] = m;$$

$$c \cdot 2 \sin 45^\circ \cdot \cos(A-45^\circ) = m. \quad \text{Отсюда } c = \frac{m}{\sqrt{2} \cdot \cos(A-45^\circ)}.$$

Далѣе поступаемъ какъ въ § 94.

Тотъ же способъ примѣняется и въ случаѣ разности катетовъ.

**102. Задача 5.** Даны гипотенуза и сумма катетовъ ( $c$ ,  $a+b=m$ ).

*Рѣшеніе.* Поступая какъ въ предыдущей задачѣ, найдемъ  $c \cdot 2 \sin 45^\circ \cdot \cos(A-45^\circ) = m$ ; отсюда  $\cos(A-45^\circ) = \frac{m}{c\sqrt{2}}$ .

---

\*) Означая черезъ  $a$  больший катетъ.

Опредѣливъ  $A=45^\circ$ , а затѣмъ  $A$ , будемъ имѣть извѣстными гипотенузу и острый уголъ.

Такъ же слѣдуетъ поступать и въ случаѣ разности катетовъ.

**103. Задача 6.** Даны катетъ и сумма гипотенузы съ другимъ катетомъ ( $a, c+b=m$ ).

*Рѣшеніе.* Въ уравненіи  $c+b=m$  выразимъ  $c$  и  $b$  черезъ извѣстный катетъ и противоположный ему уголъ. Получимъ послѣдовательно:

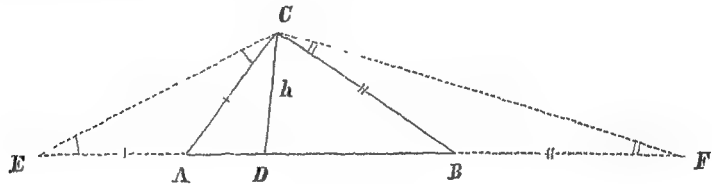
$$\frac{a}{\sin A} + a \cdot \operatorname{ctg} A = m; \quad a \cdot \frac{1 + \cos A}{\sin A} = m;$$

$$a \cdot \frac{2 \cos^2 \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = m; \quad \text{откуда} \quad \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{m}{a}.$$

По опредѣленіи  $A$  будутъ извѣстны катетъ и острый уголъ.

Такъ же рѣшается задача и тогда, если дано  $a$  и  $c-b$ .

**104. Задача 7.** Даны периметръ и высота, соответствующая гипотенузѣ ( $2p, h$ ).



Черт. 42.

*Рѣшеніе.* Пусть будетъ  $ABC$  прямоугольный треугольникъ и  $CD$  его высота. Отложивъ  $AE=AC$  и  $BF=BC$ , будемъ имѣть  $EF=2p$ ; а соединивъ  $C$  съ  $E$  и  $F$ , получимъ:  $\angle E = \frac{A}{2}$  и  $\angle F = \frac{B}{2}$ .

Теперь выразимъ отрезки  $ED$  и  $DF$  съ помощью  $h$  и угловъ  $E$  и  $F$  и сложимъ полученные выраженія:

$$ED = h \cdot \operatorname{ctg} E = h \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2}; \quad DF = h \cdot \operatorname{ctg} F = h \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}; \quad ED + DF = 2p.$$

$$\text{Такимъ образомъ} \quad 2p = h \left( \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \right) = h \cdot \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}};$$

такъ какъ  $\frac{A+B}{2} = 45^\circ$ , то  $\sin \frac{A+B}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; замѣняя получимъ

$$2p = \frac{h}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \quad \text{Изъ этого уравненія найдемъ}$$

$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{h}{p\sqrt{2}}.$$

Преобразуемъ первую часть:

$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \cos \left( \frac{A}{2} - \frac{B}{2} \right) - \cos \left( \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} *);$$

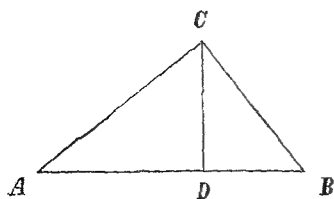
послѣ этого соотвѣтствующее уравненіе приметъ видъ

$$\cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{p\sqrt{2}}.$$

Отсюда  $\cos \frac{A-B}{2} = \frac{h+p}{p\sqrt{2}}$ , что даетъ возможность опредѣ-  
лить  $\frac{A-B}{2}$ , а затѣмъ  $A$  и  $B^{**})$ .

**105.** Въ слѣдующихъ задачахъ дается *соотношеніе* элементовъ прямоугольнаго треугольника и требуется опредѣлить углы.

**Задача 8.** Высота дѣлитъ гипотенузу въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.



Черт. 43.

*Рѣшеніе.* По условію имѣемъ  
 $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{AB}$ ; но  $\frac{BD^{***})}{AD} = \frac{a^2}{b^2}$  и слѣдов.  
 $\frac{BD}{AD} = \operatorname{tg}^2 A$ , а  $\frac{AD^{****)})}{AB} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ .

Такимъ образомъ

$$\operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 2 \sin 18^\circ,$$

откуда:  $\operatorname{tg} A = \sqrt{2 \sin 18^\circ}$ ,  $A = 38^\circ 10' 23''$ .

$$*) \cos \left( \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

\*\*) Пусть напр.  $\frac{A-B}{2} = \varphi$ ; такъ какъ кромѣ того имѣемъ  $\frac{A+B}{2} = 45^\circ$ , то, складывая и вычитая эти равенства, найдемъ  $A = 45^\circ + \varphi$  и  $B = 45^\circ - \varphi$ .

\*\*\*)) По извѣстной геометрической теоремѣ.

\*\*\*\*)) Если величина раздѣлена въ среднемъ и крайнемъ отношеніи, то бѣльшая часть равна половинѣ всей величины, умноженной на  $(\sqrt{5}-1)$ ; такъ что  $AD = \frac{AB}{2}(\sqrt{5}-1)$ .

**106. Задача 9.** Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию.

*Рѣшеніе.* Означая через  $a$  меньшій катетъ, будемъ имѣть, согласно условію,  $c - b = b - a$ ; откуда  $c + a = 2b$ ; подставляя сюда  $a = c \cdot \text{cs } B$  и  $b = c \cdot \text{sn } B$ , получимъ  $c + c \cdot \text{cs } B = 2c \cdot \text{sn } B$ .

Такъ какъ  $c$  не равно нулю, то  $1 + \text{cs } B = 2 \text{sn } B$ ; переходя здѣсь на функции половиннаго угла, получимъ послѣдовательно:

$$2 \text{cs}^2 \frac{B}{2} = 4 \text{sn} \frac{B}{2} \text{cs} \frac{B}{2}; \quad \text{cs} \frac{B}{2} \left( \text{cs} \frac{B}{2} - 2 \text{sn} \frac{B}{2} \right) = 0;$$

откуда: (1)  $\text{cs} \frac{B}{2} = 0$  и (2)  $\text{cs} \frac{B}{2} = 2 \text{sn} \frac{B}{2}$ .

Уравненіе (1) непригодно для задачи, а изъ уравненія (2), раздѣливъ обѣ части на  $\text{sn} \frac{B}{2}$ , получимъ  $\text{ctg} \frac{B}{2} = 2$ , откуда найдемъ  $B = 53^\circ 7' 48''$ .

*Замѣчаніе.* Казалось бы,—проще воспользоваться тѣмъ, что треугольникъ съ отношеніемъ сторонъ 3 : 4 : 5 удовлетворяетъ условію задачи. Но не надо забывать, что, поступая такъ, мы оставили бы открытымъ вопросъ о числѣ рѣшеній\*).

**107. Задача 10.** Стороны прямоугольного треугольника составляютъ геометрическую прогрессию.

*Рѣшеніе.* Означая через  $a$  меньшій катетъ, будемъ имѣть  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ; но  $\frac{a}{b} = \text{tg } A$  и  $\frac{b}{c} = \text{cs } A$ ; такимъ образомъ  $\text{tg } A = \text{cs } A$ , откуда находимъ послѣдовательно:

$$\frac{\text{sn } A}{\text{cs } A} = \text{cs } A; \quad \text{sn } A = \text{cs}^2 A; \quad \text{sn } A = 1 - \text{sn}^2 A; \quad \text{sn } A = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Изъ полученныхъ значеній для  $\text{sn } A$  второе невозможно, такъ какъ по абсолютной величинѣ превышаетъ единицу; а пользуясь первымъ значеніемъ ( $\text{sn } A = 2 \text{sn } 18^\circ$ ), найдемъ  $A = 38^\circ 10' 23''$ .

---

\*) Предлагаемъ учащемуся: 1) показать, что изъ равенства  $\text{ctg} \frac{B}{2} = 2$  слѣдуетъ  $a : b : c = 3 : 4 : 5$ ; 2) вопросъ о сторонахъ рѣшить алгебраически [съ помощью уравненія  $(b + x)^2 = b^2 + (b - x)^2$ ] и полученное сравнить съ уравненіями (1) и (2) § 106.

*Замѣчаніе.* Въ §§ 107 и 105 *приближенныя* значенія  $A$  равны; можно ожидать, что окажутся равными и *точные* значенія, а тогда условія задачъ 8 и 10 будутъ *сльдствіями* одно другого.

И дѣйствительно: 1) изъ равенства  $\sin A = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$  можно получить  $\operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ , а 2) равносильность условій нетрудно доказать геометрически.

**108. Замѣчаніе о способахъ рѣшенія треугольниковъ.** Способы, предложенные въ § 99, различаются между собой не только по содержанию, но и по самому своему *характеру*; укажемъ это различіе.

Первый способъ — *алгебраическаго* характера: опредѣленіе угла  $A$  мы свели къ составленію системы уравненій.

Второй способъ основанъ на геометрическихъ соображеніяхъ, сходныхъ съ тѣми, какія прилагаются въ соотвѣтствующей задачѣ на *построение*. Такой способъ будемъ называть *геометрическимъ*; онъ нагляднѣе алгебраическаго и иногда проще его<sup>1)</sup>.

Въ третьемъ способѣ сначала выдѣлена *геометрическая задача на вычисленіе* и только меньшая часть работы осталась на долю тригонометріи.

Въ § 104 содержится примѣръ *смѣшаннаго* способа: задача сведена на рѣшеніе уравненія, но для того, чтобы его составить, сдѣлано построеніе.

Такіе же способы мы будемъ *прилагать и далѣе*. Какой изъ нихъ выгоднѣе примѣнить въ томъ или другомъ случаѣ, — это зависитъ отъ свойствъ задачи; вообще же болѣе надежнымъ можно признать алгебраическій способъ\*).

<sup>1)</sup> Говоря это, мы имѣемъ въ виду также и тѣ задачи, которыя будутъ рѣшены далѣе.

\*) Геометрический способъ нерѣдко требуетъ находчивости и менѣе надеженъ со стороны *обычности* рѣшенія (какъ увидимъ впоследствии).

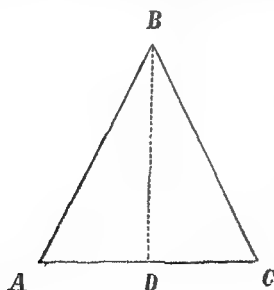
## IX. Нѣкоторые примѣненія прямоугольных треугольниковъ.

**109. Общее замѣчаніе.** Прямоугольные треугольники примѣняются между прочимъ къ равнобедреннымъ треугольникамъ, къ правильнымъ многоугольникамъ и къ кругу.

Большая часть задачъ изъ названныхъ отдѣловъ рѣшаются съ помощью только *одного* прямоугольнаго треугольника: для этого въ равнобедренномъ треугольникѣ проводятъ высоту, а въ правильномъ многоугольникѣ радіусъ и апопоему.

Разберемъ нѣсколько примѣровъ.

**110. Задача 1.** Рѣшить равнобедренный треугольникъ по основанію  $b$  и углу при вершинѣ  $B$ .



Черт. 44.

*Рѣшеніе.* Для угловъ  $A$  и  $C$  имѣемъ:  
 $A = C$  и  $A + C = 180^\circ - B$ ; отсюда

$$A = C = 90^\circ - \frac{B}{2}. \quad \text{Чтобы опредѣлить}$$

$a = c$  и  $S$ , проведемъ высоту  $BD$ , которая дастъ *равные* прямоугольные треугольники. Изъ тр-ка  $CBD$  найдемъ:

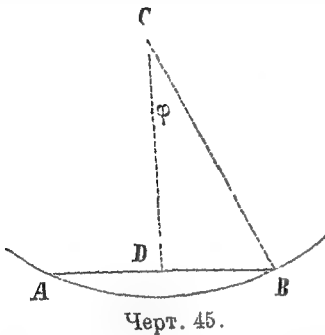
$$1) \quad \frac{CD}{BC} = \sin \frac{B}{2} \quad \text{или} \quad \frac{b}{2} : a = \sin \frac{B}{2},$$

$$\text{откуда} \quad a = \frac{b}{2} : \sin \frac{B}{2};$$

$$2) \quad BD = CD \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}, \quad \text{съ помощью чего получимъ}$$

$$S = CD \cdot BD = \frac{b^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$$

111. *Задача 2.* Сторону правильного вписанного семиугольника выразить въ десятичныхъ доляхъ радіуса.



*Рѣшеніе.* Означимъ искомую сторону черезъ  $a_7$ . Проведя радіусъ  $CB$  и апогею  $CD$ , найдемъ

$$\frac{1}{2} a_7 = R \cdot \sin \varphi, \quad \text{откуда}$$

$$a_7 = R \cdot 2 \sin \varphi,$$

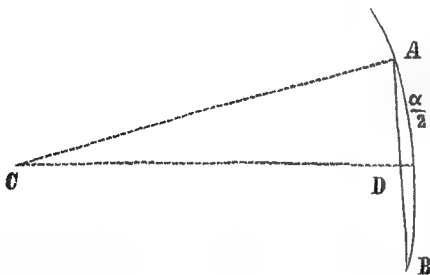
при чемъ  $\varphi = \frac{180^\circ}{7} = 25^\circ 42' 51''$

(съ точностью до 0,5''); теперь съ помощью логарифмовъ полу-

чимъ  $2 \sin \varphi = 0,86776$ . Такимъ образомъ  $a_7 = 0,86776 R$ .

*Замѣчаніе.* Въ черченіи, чтобы построить приближенно  $a_7$ , дѣлять пополамъ  $a_3$ . Полученный выше результатъ позволяетъ судить о степени точности этого приема  $\left( \frac{1}{2} a_3 = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86603 R \right)$ .

112. *Задача 3.* Определить величину дуги\*), если хорда равна половинѣ радіуса.



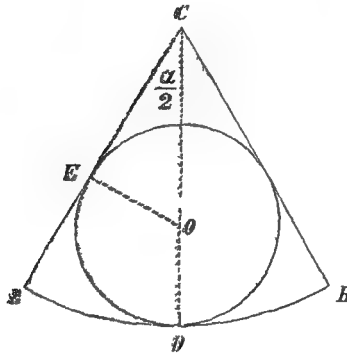
*Рѣшеніе.* Означимъ искомую величину дуги черезъ  $\alpha$ . Проведя радіусъ  $CA$  и перпендикуляръ  $CD$ , изъ треугольника  $CAD$  получимъ  $\frac{AD}{CA} = \sin \frac{\alpha}{2}$ ; но по условію имѣемъ  $\frac{AB}{CA} = \frac{1}{2}$ , слѣдовательно  $\frac{AD}{CA} = \frac{1}{4}$ ; такимъ обра-

зомъ  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ , откуда:  $\frac{\alpha}{2} = 14^\circ 28' 39''$ ;  $\alpha = 28^\circ 57' 18''$ .

\*) Т.-е. ея градусное выраженіе.



13. **Задача 4.** Въ круговомъ секторѣ центральнѣй уголъ равенъ  $\alpha$ , а радиусъ дуги равенъ  $R$ . Определить радиусъ  $r$  круга, вписаннаго въ этотъ секторъ.



Черт. 47.

**Рѣшеніе.** 1-й способъ. Пусть будетъ  $O$  центръ вписаннаго круга. Проведя  $OE$  и  $CD$  (въ точки касанія), будемъ имѣть

$$OE = OC \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{или} \quad r = (R - r) \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

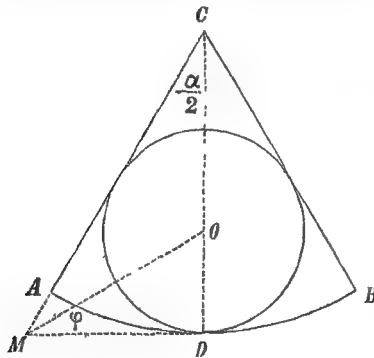
Отсюда найдемъ

$$r = \left( R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right) : \left( 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$\text{но} \quad 1 + \sin \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right); \quad \text{слѣдов.} \quad r = \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}$$

2-й способъ. Сначала найдемъ искомый радиусъ посредствомъ **построенія**. Для этого: 1) раздѣлимъ уголъ  $\alpha$  пополамъ — линіей



Черт. 48

$CD$ , 2) изъ точки  $D$  проведемъ касательную къ дугѣ до пересѣченія — въ точкѣ  $M$  — съ продолженіемъ радиуса  $CA$  и 3) раздѣлимъ пополамъ уголъ  $CMD$ . Точка пересѣченія его равнодѣлящей съ линіей  $CD$  и есть центръ вписаннаго круга.

Изъ тр-ка  $MOD$  найдемъ  $r = MD \cdot \operatorname{tg} \varphi$ .

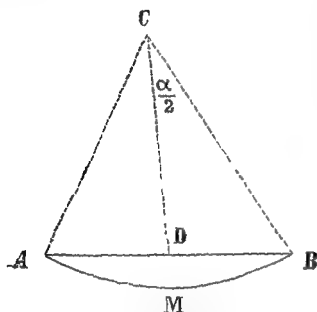
Линія  $MD$  опредѣлится изъ треугольника  $MCD$ , а именно

$$MD = CD \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; \quad \text{для угла } \varphi \text{ имѣемъ } \varphi = \frac{1}{2} \angle CMD = \frac{1}{2} \left( 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 45^\circ - \frac{\alpha}{4}.$$

Пользуясь найденными выраженіями, полу-

чимъ окончательно  $r = R \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)^*$ .

114. Задача 5. Определить площадь сегмента, если даны хорда  $a=10$  и дуга  $\alpha=57^\circ 26'$ .



Черт. 49.

Рѣшеніе. I. Составленіе формулы. Проведя радиусы  $CA$  и  $CB$ , замѣтимъ, что искомую площадь можно получить какъ разность площадей сектора  $CAMB$  и треугольника  $ACB$ .

1) Для площади сектора имѣемъ

$$S_1 = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}^{**}; \text{ а изъ треугольника}$$

$BCD$  получимъ  $R = \frac{a}{2} : \sin \frac{\alpha}{2}$ ; такимъ

$$\text{образомъ } S_1 = \left( \pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \right) : \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

2) Площадь треугольника  $ACB$  опредѣлится какъ въ § 110,

$$\text{а именно } S_2 = \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

$$3) \text{ Итакъ } S = S_1 - S_2 = \frac{\pi a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

II. Вычисленіе. Подставляя въ предыдущую формулу данныя числа, получимъ (послѣ сокращенія)

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi \cdot 3446^{***}}{\sin^2 28^\circ 43' \cdot 864} - 25 \cdot \operatorname{ctg} 28^\circ 43'.$$

Вычислимъ отдѣльно  $S_1$  и  $S_2$  и сдѣлаемъ вычитаніе.

(вычисленіе см. на слѣд. стр.)

\*) Предлагаемъ учащемуся показать тождественность обоихъ выраженіи, полученныхъ для  $r$ .

\*\*) Изъ пропорціи  $\frac{S_1}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ .

\*\*\*)  $\frac{a}{360^\circ} = \frac{57^\circ 26'}{360^\circ} = \frac{3446'}{21600'} = \frac{3446}{21600}$ .

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi \cdot 3446}{\sin^2 28^\circ 43' \cdot 864} - 25 \cdot \operatorname{ctg} 28^\circ 43'.$$

*Вычисление.*

Для $S_1$ )	$\begin{array}{r} \lg \pi = 0,49715 \\ + \lg 3446 = 3,53732 \\ \hline 4,03447 \\ - 2,29985 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \lg \sin^2 28^\circ 43' = 9,36334 - 10 \\ + \lg 864 = 2,93651 \\ \hline 2,29985 \end{array}$
	$\lg S_1 = 1,73462;$	$S_1 = 54,2775$

Для $S_2$ )	$\begin{array}{r} \lg 25 = 1,39794 \\ + \lg \operatorname{ctg} 28^\circ 43' = 0,26133 \\ \hline \end{array}$
	$\lg S_2 = 1,65927; \quad S_2 = 45,6320$

Для  $S$ )  $S = S_1 - S_2 = 8,6455.$

Итакъ искомая площадь содержитъ 8,6455 кв. единицъ.

## Х. Косоугольные треугольники.

### Соотношенія между элементами косоугольнаго треугольника.

115\*. Сначала укажемъ, какъ выразится *тригонометрически* зависимость между *углами* треугольника.

1) Такъ какъ въ треугольникѣ сумма двухъ угловъ и третій уголъ дополняютъ другъ друга до  $180^\circ$ , то ихъ синусы равны; а косинусы, тангенсы и котангенсы имѣютъ одинаковую абсолютную величину, но противоположные знаки<sup>1)</sup>. Такъ будемъ имѣть:  $\text{sn}(B+C)=\text{sn } A$ ;  $\text{cs}(B+C)=-\text{cs } A$ ;  $\text{tg } B=-\text{tg}(A+C)$ ; и т. д.

2) Такъ какъ въ треугольникѣ половина одного угла и полусумма двухъ другихъ угловъ составляютъ вмѣстѣ  $90^\circ$ , то функции полусуммы двухъ угловъ треугольника равны родственнымъ функциямъ половины третьяго угла<sup>2)</sup>. Напримѣръ:

$$\text{sn } \frac{A+B}{2} = \text{cs } \frac{C}{2}; \quad \text{tg } \frac{B+C}{2} = \text{ctg } \frac{A}{2}; \quad \text{sn } \frac{B}{2} = \text{cs } \frac{A+C}{2}; \text{ и т. д.}$$

116. Рассмотримъ теперь зависимость между углами и линейными элементами.

**Теорема.** Во всякомъ треугольникѣ сторона равна діаметру описаннаго круга, умноженному на синусъ противолежащаго угла.

См. § 62.

**Слѣдствіе.** Изъ равенствъ:

$$a=2R \cdot \text{sn } A, \quad b=2R \cdot \text{sn } B \quad \text{и} \quad c=2R \cdot \text{sn } C$$

слѣдуетъ

$$\frac{a}{\text{sn } A} = \frac{b}{\text{sn } B} = \frac{c}{\text{sn } C} = 2R$$

(см. также слѣд. стр.)

<sup>1)</sup> См. § 39 п. 1 а).

<sup>2)</sup> См. § 39 п. 3.

т.-е. для стороны треугольника на синусы противолежащих угловъ, получимъ равныя частныя: они выражаютъ діаметръ описаннаго круга.

**117\*. Теорема.** Во всякомъ треугольникѣ стороны относятся какъ синусы противолежащихъ угловъ (теорема синусовъ).

Доказ. Для всякаго треугольника имѣемъ:

$$a=2R \cdot \sin A, \quad b=2R \cdot \sin B, \quad c=2R \cdot \sin C;$$

отсюда слѣдуетъ

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C \quad *) \quad (XXX)$$

**118\* Теорема.** Сумма и разность двухъ сторонъ треугольника относятся между собой какъ тангенсы полусуммы и полуразности противолежащихъ угловъ (теорема тангенсовъ).

Доказ. По § 116 найдемъ

$$a+b=2R(\sin A+\sin B) \quad \text{и} \quad a-b=2R(\sin A-\sin B);$$

отсюда

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}.$$

Примѣняя здѣсь ко второй части формулу XXVII (§ 79), получимъ

$$(a+b):(a-b) = \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} : \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}. \quad (XXXI)$$

**119\*. Теорема.** Во всякомъ треугольникѣ сторона равна суммѣ двухъ другихъ сторонъ, соответственно умноженныхъ на косинусъ угла, образуемаго съ первой стороной.

См. § 63.

**120\*. Теорема.** Во всякомъ треугольникѣ квадратъ стороны равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія ихъ, умноженнаго на косинусъ угла между ними.

\*) **Примѣръ.** Опредѣлить  $a : b : c$ , если  $A : B : C = 3 : 4 : 5$ .

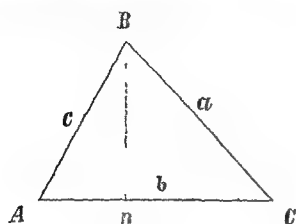
Сначала найдемъ.  $A = 45^\circ$ ,  $B = 60^\circ$  и  $C = 75^\circ$ . Теперь будемъ имѣть

$$a : b : c = \sin 45^\circ : \sin 60^\circ : \sin 75^\circ. \quad \text{Подставляя} \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и}$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad \text{получимъ}$$

$$a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

**Доказ.** Преобразуемъ геометрическія выраженія для квадрата стороны треугольника противъ острого угла и противъ тупого угла.

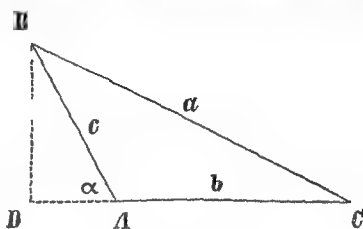


Черт. 50

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AD.$$

Изъ тр-ка ABD имѣемъ

$$AD = c \cdot \cos A$$



Черт. 51.

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AD.$$

Изъ тр-ка ABD имѣемъ

$AD = c \cdot \cos \alpha$ , но  $\cos \alpha = -\cos A$  \*),  
такъ что  $AD = -c \cdot \cos A$ .

Подстановка AD приводитъ къ общей формулѣ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \quad (\text{XXXII})$$

**121. Теорема.** Высота треугольника равна боковой стороне, умноженной на синусъ угла между нею и основаніемъ.

Пусть будетъ  $c$  боковая сторона и  $b$  основаніе; соответствующую высоту означимъ черезъ  $h_b$ . Требуется доказать, что  $h_b = c \cdot \sin A$ .

**Доказ.** Здѣсь слѣдуетъ различать два случая.

Уголъ  $A$  острый  
(черт. 50). Тогда изъ тр-ка  
ABD получимъ прямо

$$h_b = c \cdot \sin A$$

Уголъ  $A$  тупой  
(черт. 51). Тогда изъ тр-ка  
ABD получимъ  $h_b = c \cdot \sin \alpha$ ;  
но  $\sin \alpha = \sin A$ ; а потому  
 $h_b = c \cdot \sin A$ .

Формула получилась общая.

**122.** Въ этомъ параграфѣ будутъ выведены формулы для опредѣленія угловъ треугольника по тремъ сторонамъ.

Изъ равенства XXXII находимъ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

но эта формула при многозначныхъ числахъ неудобна.

\*) См. § 39 п. 1 и подстрочное примѣчаніе.

2) Слѣдующія преобразованія той же формулы приводятъ къ выраженіямъ пригоднымъ для логарифмированія.

Имѣемъ	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$	отсюда
$1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$ $= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$ $= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$		$1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$ $= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$
$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2(p-c) \cdot 2(p-b)}{2bc}$ $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ <p style="text-align: center;">(XXXIII)</p>		$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2p \cdot 2(p-a)}{2bc}$ $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ <p style="text-align: center;">(XXXIV)</p>

(Такъ какъ въ треугольникѣ половина угла всегда менѣе  $90^\circ$ , то  $\sin \frac{A}{2}$  и  $\cos \frac{A}{2}$  положительны, что и принято во вниманіе при извлеченіи корня).

Дѣля равенство XXXIII на XXXIV, найдемъ

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \quad \text{(XXXV)}$$

(По аналогіи съ выведенными можно составить формулы и для остальныхъ угловъ.)

**123.** Тангенсъ половины угла треугольника легко опредѣлить также съ помощью радіуса описаннаго круга. Сдѣлаемъ это.

\*) Полагаемъ  $a + b + c = 2p$ ; тогда  
 $a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c)$   
 $a + c - b = 2(p - b)$   
 $b + c - a = 2(p - a).$

\*\*) Мнемоническое замѣчаніе къ форм XXXV. въ числительѣ вычитаются изъ  $p$  стороны, заключающія искомый уголъ.

Пусть будутъ.  $O$  центръ вписаннаго круга;  $r$  его радіусъ;  $D$ ,  $E$  и  $F$  точки касанія. Замѣтимъ, что линіи  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$

дѣлятъ углы треугольника пополамъ и что отрѣзки сторонъ при общей вершинѣ равны<sup>1)</sup>.

Сначала опредѣлимъ эти отрѣзки. Означая ихъ — въ порядкѣ вершинъ треугольника — черезъ  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получимъ

$$x + y + z = p;$$

$$\text{но } y + z = BC = a;$$

$$\text{слѣдов. } x = p - a.$$

По аналогіи:

$$y = p - b \quad \text{и} \quad z = p - c.$$

Теперь изъ прямоугольныхъ треугольниковъ найдемъ

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}; \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}. \quad (\text{XXXVI})$$

Чтобы произвести вычисленіе по этимъ формуламъ, надо сперва опредѣлить  $r$ ; для этого послужать равенства

$$S = r \cdot p^*) \quad \text{и} \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$\text{отсюда} \quad r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

**124. Выраженія площади треугольника.** Изъ извѣстнымъ изъ геометріи выраженіямъ площади треугольника по *длинь линій* тригонометрія присоединяетъ еще выраженія, *содержащія углы*. Выведемъ два болѣе употребительныя.

1) По геометрической теоремѣ имѣемъ  $S = \frac{1}{2} b \cdot h_b$ ; но  $h_b = c \cdot \sin A$  (§ 121); такимъ образомъ

$$S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A \quad (\text{XXXVII})$$

(словесное выраженіе см. на слѣд. стр.)

<sup>1)</sup> Напр.  $AE = AF$  и т. д.

<sup>\*)</sup> Площадь описанной фигуры равна произведенію радіуса на половину периметра



т.-е. площадь всякаго треугольника равна половинѣ произведенія двухъ сторонъ, умноженнаго на синусъ угла между ними.

2) Выраженіе  $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$  преобразуемъ, пользуясь равенствами  $b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B^*)$  и  $c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C$ ;

получимъ  $S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}$ ; но  $\sin A = \sin (B+C)$ ;

поэтому  $S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C^{**})}{\sin (B+C)}$  (XXXVIII)

*Замѣчаніе.* Формулы XXXVII и XXXVIII выведены изъ соотношеній, обладающихъ общностью, а потому и сами имѣютъ то же свойство.

#### Основные случаи рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ.

125. 1-й случай. Даны сторона и два угла ( $a, B, C$ ).

*Рѣшеніе.* Для третьяго угла имѣемъ  $A = 180^\circ - (B+C)$ .

Чтобы опредѣлить стороны  $b$  и  $c$ , сперва находимъ  $2R = \frac{a}{\sin A}$ ;

послѣ чего получимъ

$$b = 2R \cdot \sin B = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B \quad \text{и} \quad c = 2R \cdot \sin C = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C.$$

Для площади имѣемъ изъ предыдущаго параграфа:

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin (B+C)}.$$

Числовой примѣръ:  $a = 253$ ;  $B = 38^\circ 50' 48''$ ;  $C = 23^\circ 42'$ .

Вычисленіе  $A$ .

$$\begin{array}{r} B = 38^\circ 50' 48'' \\ C = 23^\circ 42' \\ \hline B+C = 62^\circ 32' 48'' \\ A = 117^\circ 27' 12'' \end{array}$$

Вычисленіе  $\lg 2R$ .

$$\begin{array}{r} \lg a = 2,40312 \\ - \lg \sin A^{***}) = 9,94812 - 10 \\ \hline \lg 2R = 2,45500 \end{array}$$

\*) По § 116 (теор. и слѣдств.) имѣемъ  $b = 2R \cdot \sin B = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B$ .

\*\*) Мнемоническое замѣчаніе: углы  $B$  и  $C$  прилежатъ къ сторонѣ  $a$ .

\*\*\*) Такъ какъ уголъ  $A$  тупой, то вмѣсто  $\sin A$  беремъ  $\sin (180^\circ - A)$ , т.-е.  $\sin (B+C)$ .

Вычисление $b$ .	Вычисление $c$ .
$+ \lg 2R = 2,45500$	$+ \lg 2R = 2,45500$
$+ \lg \sin B = 9,79743 - 10$	$+ \lg \sin C = 9,60417 - 10$
<hr/>	<hr/>
$\lg b = 2,25243$	$\lg c = 2,05917$
$b = 178,825$	$c = 114,597$

Для площади найдемъ  $S = 9092,6$ .

*Замѣчаніе.* Если требуется  $b$  и  $c$  выразить только съ помощью данныхъ, то надо въ полученныхъ выше формулахъ замѣнить  $\sin A$  черезъ  $\sin(B+C)$ .

**126\*.** 2-й случай. Даны две стороны и уголъ между ними ( $b$ ,  $c$ ,  $A$ ).

*Рѣшеніе.* Опредѣлимъ сначала углы  $B$  и  $C$  по ихъ полусуммѣ и полуразности: 1) полусумму найдемъ, вычтя  $A$  изъ  $180^\circ$  и взявъ половину остатка; 2) для нахождения полуразности примѣнимъ теорему тангенсовъ (§ 118); 3) зная полусумму и полуразность угловъ, находимъ и самые углы — чрезъ сложение и вычитаніе полученныхъ результатовъ.

Когда будутъ извѣстны  $B$  и  $C$ , то  $a$  опредѣлится по формулѣ  $a = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin A$ . Для  $S$  имѣемъ въ § 124:  $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A$ .

Числовой примѣръ:  $b = 1123$ ;  $c = 2034$ ;  $A = 72^\circ 15' 19''$ .

Вычисленіе угловъ  $B$  и  $C$ .

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{C+B}{2} = \frac{180^\circ - A}{2}; & \lg \frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \cdot \lg \frac{C+B}{2} \\
 A = 72^\circ 15' 19'' & c = 2034 & | \quad c-b = 911 \\
 180^\circ - A = 107^\circ 44' 41'' & b = 1123 & | \quad c+b = 3157 \\
 \hline
 \frac{C+B}{2} = 53^\circ 52' 21'' & (c-b) = 2,95952 & \\
 \pm \frac{C-B}{2} = 21^\circ 34' 13'' & - \lg(c+b) = 3,49927 & \\
 \hline
 C = 75^\circ 26' 34'' & + 9,46025 - 10 & \\
 B = 32^\circ 18' 8'' & \lg \lg \frac{C+B}{2} = 0,13671 & \\
 & \lg \lg \frac{C-B}{2} = 9,59696 - 10 & 
 \end{array}$$

(продолженіе на слѣд. стр.)

$$[b=1123, c=2034, A=72^{\circ}15'19'', B=32^{\circ}18'8'']$$

Вычисление $a = \frac{b \cdot \operatorname{sn} A}{\operatorname{sn} B}$ . $\lg b = 3,05038$ $\lg \operatorname{sn} A = 9,97883 - 10$ <hr style="width: 100%;"/> $3,02921$ $\lg \operatorname{sn} B = 9,72786 - 10$ <hr style="width: 100%;"/> $\lg a = 3,30135$ $a = 2001,48$	Вычисление $S = b \cdot \operatorname{sn} A \cdot \frac{c}{2}$ . $\lg(b \cdot \operatorname{sn} A) = 3,02921^*)$ $+$ $\lg \frac{c}{2} = 3,00732$ <hr style="width: 100%;"/> $\lg S = 6,03653$ $S = 1087750.$
--	---

**Замѣчаніе 1.** Не лишнее будетъ указать, что сложеніе угловъ  $C$ ,  $B$  и  $A$  не можетъ служить повѣркой вычисленія (точнѣе говоря, не можетъ обнаружить ошибки въ опредѣленіи  $\frac{C+B}{2}$ ); а именно: углы  $C$  и  $B$  опредѣлены подѣ условіемъ, что  $\frac{C+B}{2} = \frac{180^{\circ}-A}{2}$ ; поэтому сложеніе  $C$ ,  $B$  и  $A$  равносильно сложенію  $180^{\circ}-A$  и  $A$ , слѣдовательно *всегда* даетъ  $180^{\circ}$ .

**Замѣчаніе 2.** Въ предыдущемъ указанъ только способъ удобный для вычисленія. Если же требуется выразить искомыя величины съ помощью данныхъ, то будемъ имѣть:

1)  $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A}$  (§ 120); далѣе, изъ пропорцій  $\frac{\operatorname{sn} B}{\operatorname{sn} A} = \frac{b}{a}$  и  $\frac{\operatorname{sn} C}{\operatorname{sn} A} = \frac{c}{a}$  получимъ: 2)  $\operatorname{sn} B = \frac{b \cdot \operatorname{sn} A}{a}$  и

3)  $\operatorname{sn} C = \frac{c \cdot \operatorname{sn} A}{a}$ , при чемъ здѣсь  $a$  надо замѣнить предыдущимъ вы-

раженіемъ; 4) для  $S$  останется прежняя формула  $S = \frac{1}{2}bc \cdot \operatorname{sn} A$ .

**127. 3-й случай.** Даны двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ ( $a$ ,  $b$ ,  $A$ ).

**Рѣшеніе.** Изъ пропорцій  $\frac{\operatorname{sn} B}{\operatorname{sn} A} = \frac{b}{a}$  получимъ  $\operatorname{sn} B = \frac{b \cdot \operatorname{sn} A}{a}$ , съ помощью чего найдемъ уголъ  $B$ ; далѣе будемъ имѣть:

$$C = 180^{\circ} - (A + B), \quad c = \frac{a}{\operatorname{sn} A} \cdot \operatorname{sn} C \quad \text{и} \quad S = \frac{ab}{2} \cdot \operatorname{sn} C.$$

---

\*) Взято изъ вычисленія  $a$ .

Обратимъ вниманіе на вычисленіе угла  $B$ . Здѣсь мы должны опредѣлить по *синусу* такой уголъ, который принадлежитъ *косоугольному* треугольнику и слѣдов. имѣетъ величину между  $0$  и  $180^\circ$ ; а въ этихъ границахъ синусъ (не равный единицѣ) даетъ *два* угла: острый и дополнительный тупой; поэтому возникаетъ сомнѣніе, будутъ ли пригодны оба угла или только одинъ изъ нихъ, и тогда какой именно. Этотъ вопросъ рѣшается уже *сравненіемъ сторонъ*, такъ какъ въ треугольникѣ *тупой* уголъ можетъ быть только противъ *большой* стороны<sup>1)</sup>.

Въ виду сказаннаго будетъ полезно сначала изслѣдовать задачу по сравнительной величинѣ данныхъ сторонъ.

**Изслѣдованіе. I.** Случай  $a > b$ . При этомъ уголъ  $A$ , какъ лежащій противъ большей изъ извѣстныхъ сторонъ, можетъ быть и острый и тупой.

Разсмотримъ правую часть равенства  $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$ . Если  $b < a$ , то и подавно  $b \cdot \sin A < a$ , а потому  $\sin B < 1$ ; слѣдов., задача возможна всегда<sup>2)</sup>, и  $\sin B$  доставитъ два угла. Но здѣсь уголъ  $B$  долженъ быть только острый, такъ какъ онъ лежитъ противъ стороны, которая не есть ббольшая.

II. Случай  $a < b$ . Тогда уголъ  $A$  долженъ быть острый, такъ какъ онъ лежитъ противъ стороны, которая менѣе другой.

Обращаясь къ выраженію  $\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$ , замѣтимъ, что если  $b > a$ , то  $b \cdot \sin A$  либо болѣе  $a$ , либо равно  $a$ , либо менѣе  $a$ , — въ зависимости отъ угла  $A$ ; поэтому разсмотримъ отдѣльно каждый случай.

<sup>1)</sup> Въ предыдущихъ задачахъ мы не встрѣчали подобнаго затрудненія — вслѣдствіе того, что въ нихъ опредѣляемый уголъ, по свойству самой фигуры, могъ быть только *острый* (таковы напримѣръ: уголъ  $A$  въ § 96, уголъ  $\frac{C-B}{2}$  въ § 126 и т. д.); исключеніемъ служить лишь уголъ  $2A$  въ § 99, но и тамъ вопросъ былъ рѣшенъ сравненіемъ *однихъ угловъ*.

Теперь же намъ приходится принимать во вниманіе не только углы, но и *стороны*. Этотъ *новый характеръ изслѣдованія* и представляетъ *существенную особенность* рассматриваемаго случая.

<sup>2)</sup> Т.-е. при всякомъ значеніи угла  $A$ .

- 1)  $b \cdot \operatorname{sn} A > a$ ; тогда  $\operatorname{sn} B > 1$  (или  $\lg \operatorname{sn} A > 0$ ) и задача невозможна.
- 2)  $b \cdot \operatorname{sn} A = a$ ; тогда  $\operatorname{sn} B = 1$  и треугольник оказывается прямоугольным.
- 3)  $b \cdot \operatorname{sn} A < a$ ; тогда  $\operatorname{sn} B < 1$  и получаются два угла. Въ настоящемъ случаѣ для *треугольника* надо принять не только острый уголъ, но и тупой, такъ какъ сторона  $b$  болѣе стороны  $a$ , а сторона  $c$  не можетъ вліять на выборъ угла  $B$ , потому что сама опредѣляется въ зависимости отъ него.

Итакъ въ уголѣ  $B$  теперь *равно возможны* два значенія:  $\varphi$  и  $180^\circ - \varphi$ ; соотвѣтственно этому получимъ также по два значенія для  $C$ ,  $c$  и  $S^*$ ).

Для наглядности, результаты произведеннаго изслѣдованія помѣщаемъ въ видѣ таблицы<sup>1)</sup>.

I	$a > b$ ( $A < 90^\circ$ или $A > 90^\circ$ )	$b \cdot \operatorname{sn} A < a$	$B < 90^\circ$
II	$a < b$ ( $A < 90^\circ$ )	1) $b \cdot \operatorname{sn} A > a$ 2) $b \cdot \operatorname{sn} A = a$ 3) $b \cdot \operatorname{sn} A < a$	Задача невозможна. $B = 90^\circ$ . $B_1 = \varphi$ и $B_2 = 180^\circ - \varphi$ (два <i>неравныхъ</i> треугольника).

Теперь для случая  $\lg \operatorname{sn} B < 0$  можно дать такое указаніе: если уголъ  $B$  лежитъ противъ меньшей<sup>2)</sup> стороны, то надо взять только острый уголъ; если же уголъ  $B$  лежитъ противъ большей стороны, то задача допускаетъ два рѣшенія.

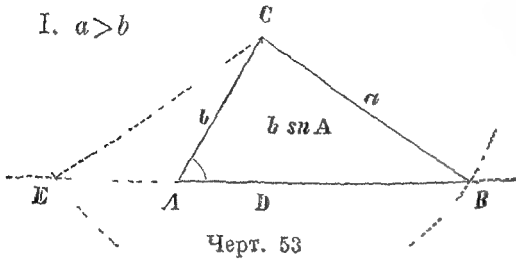
\*) Что  $C_1$  не равно  $C_2$ , это очевидно. Для равенствъ  $c_1 = c_2$  и  $S_1 = S_2$  требуется, чтобы  $\operatorname{sn} C_1 = \operatorname{sn} C_2$ , или  $C_1 + C_2 = 180^\circ$ , но этого нѣтъ ( $C_1 + C_2 = 180^\circ - 2A$ )

1) Въ «Прибавленіяхъ» задача изслѣдована еще по сторонамъ  $c$ .

2) Изъ данныхъ

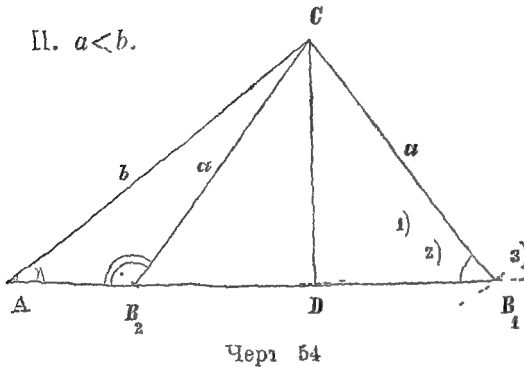
128. Для сравненія съ таблицей § 127 приводимъ еще соотвѣтствующія геометрическія построенія<sup>1)</sup>.

I.  $a > b$



Искомый треугольникъ есть  $ABC$ . [Треугольникъ  $CAE$  непригоденъ, потому что не содержитъ даннаго угла.]

II.  $a < b$ .



1) Задача невозможна.

2) Искомый тр-къ прямоугольный:  $ACD$ .

3) Два треугольника:  $ACB_1$  и  $ACB_2$  ( $\angle AB_2C = 180^\circ - \angle CB_2B_1 = 180^\circ - B_1$ ).

129\*. Числовые примѣры. Приводимъ по одному примѣру на каждый изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ указывая соотвѣтствующие пункты изслѣдованія одинаковой нумераціей этихъ пунктовъ и примѣровъ.

Формулы, данныя въ началѣ § 127, мы для удобства вычисленія иногда будемъ измѣнять, а именно: при полномъ рѣшеніи треугольника удобнѣе  $\sin B$  и  $c$  вычислять по формуламъ:

$$\sin B = \frac{b}{2R} \quad \text{и} \quad c = 2R \cdot \sin C, \quad \text{гдѣ} \quad 2R = \frac{a}{\sin A}.$$

Переходимъ теперь къ самымъ примѣрамъ.

<sup>1)</sup> Подробности мы опускаемъ, полагая, что учащемуся онѣ извѣстны изъ геометрии

$$\left[ 2R = \frac{a}{\sin A}; \quad \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{b}{2R}; \quad c = 2R \cdot \sin C; \quad S = \frac{ab}{2} \cdot \sin C \right]$$

I. Дано:  $a=700$ ;  $b=650$ ;  $A=40^\circ 25'$ .

Вычисление $B$ .	Вычисление $C$ .
$\lg a = 2,84510$ $\text{---} \lg \sin A = 9,81180 - 10$ $\lg 2R = 3,03330$ $\lg b = 2,81291$ $\text{---} \lg 2R = 3,03330$ $\lg \sin B = 9,77961 - 10$ $B = 37^\circ 0' 53''.$	$C = 180^\circ - 77^\circ 25' 53'' =$ $102^\circ 34' 7''$  Вычисление $c$ . $\lg 2R = 3,03330$ $\text{+} \lg \sin C = 9,98947 - 10$ $\lg c = 3,02277$ $c = 1053,83$

Для площади получим  $S = 222050$ .

II. 2) Дано:  $a=30$ ;  $b=57$ ;  $A=42^\circ$ .

Вычисление угла  $B$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} + \lg b = 1,75587 \\ + \lg \sin A = 9,82551 - 10 \\ \hline 1,58138 \\ - \lg a = 1,47712 \\ \hline \lg \sin B = 0,10426; \text{ задача невозможна.} \end{array} \right.$$

II. 2) Дано:  $a=72$ ;  $b=97$ ;  $A=47^\circ 55' 30''$ .

Вычисление угла  $B$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} + \lg b = 1,98677 \\ + \lg \sin A = 9,87056 - 10 \\ \hline 1,85733 \\ - \lg a = 1,85733 \\ \hline \lg \sin B = 0,00000 \end{array} \right.$$

Если полученный  $\lg \sin B$  есть точный, то  $B=90^\circ$ ; если же онъ только приближенный, то уголъ  $B$  опредѣлится границами  $89^\circ 44'$  и  $90^\circ 16'$ .

II. 3) Дано:  $a=4$ ;  $b=7$ ;  $A=30^\circ$ .

Вычисление  $B$ .

$$\begin{array}{r} \lg b = 0,84510 \\ \text{---} \lg 2R^*) = 0,90309 \\ \hline \lg \sin B = 9,94201 - 10 \\ B_1 = 61^\circ 2' 43''; \quad B_2 = 118^\circ 57' 17'' \end{array}$$

\*)  $2R = 4 : \sin 30^\circ = 8$ .

Соотвѣственно двумъ значеніямъ угла  $B$  получимъ далѣе

$$\begin{array}{l|l} *) \\ C_1 = B_2 - A = 88^\circ 57' 17'' & C_2 = B_1 - A = 31^\circ 2' 43'' \\ c_1 = 2R \cdot \sin C_1 = 7,99867 & c_2 = 2R \cdot \sin C_2 = 4,12573^{**}) \\ S_1 = \frac{ab}{2} \cdot \sin C_1 = 13,9977 & S_2 = \frac{ab}{2} \cdot \sin C_2 = 7,22. \end{array}$$

**130. 4-й случай.** Даны три стороны ( $a, b, c$ ).

*Рѣшеніе.* Примѣняемъ формулы, выведенныя въ § 123:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}; \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}; \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$$

$$r = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c) : p}.$$

Числовой примѣръ:  $a=215$ ;  $b=500$ ;  $c=427^{***})$ .

Вычисленіе  $\lg r$ .

$a=215$	$\lg(p-a)=2,55145$	
$b=500$	$+ \lg(p-b)=1,85126$	
$c=427$	$\lg(p-c)=2,15836$	
$2p=1142$	$\hline 6,56107$	
$p=571$	$- \lg p=2,75664$	
$p-a=356$	$\hline 3,80443$	
$p-b=71$	$\lg r=1,90222$	
$p-c=144$		
Вычисленіе $A$ .	Вычисленіе $B$	Вычисленіе $C$ .
$\lg r=1,90222$	$\lg r=1,90222$	$\lg r=1,90222$
$\hline \lg(p-a)=2,55145$	$\hline \lg(p-b)=1,85126$	$\hline \lg(p-c)=2,15836$
$\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 9,35077-10$	$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 0,05096$	$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 9,74386-10$
$\frac{A}{2} = 12^\circ 38' 26''$	$\frac{B}{2} = 48^\circ 21' 14''$	$\frac{C}{2} = 29^\circ 0' 22''$
$A = 25^\circ 16' 52''$	$B = 96^\circ 42' 28''$	$C = 58^\circ 0' 44''$

(окончаніе на слѣд. стр.)

\*) Такъ какъ  $B_1 + B_2 = 180^\circ$ , то  $C_1 = 180^\circ - B_1 - A = B_2 - A$  и  $C_2 = 180^\circ - B_2 - A = B_1 - A$ .

\*\*) Для повѣрки можетъ служить равенство  $\frac{1}{2}(c_1 + c_2) = b$ . съ  $A$

[на черт. 54 видно, что  $\frac{1}{2}(AB_1 + AB_2) = AD$ ].

\*\*\*) Треугольникъ *возможенъ*, потому что большая сторона менѣ суммы двухъ другихъ.



Такъ какъ углы  $A$ ,  $B$  и  $C$  найдены *независимо* одинъ отъ другого, то сложене ихъ можетъ служить повѣркой вычисленія.

При этомъ сумма иногда немного отличается отъ  $180^\circ$ —вслѣдствіе того, что вычисленіе только приближенное: такъ въ нашемъ примѣрѣ получимъ не  $180^\circ$ , а  $180^\circ 0' 4''$ .

Что касается площади, то она опредѣлится по формулѣ

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Пользуясь *произведеннымъ* уже вычисленіемъ, найдемъ  $\lg S = \frac{1}{2}(6,56107 + 2,75664) = 4,65886$ ; отсюда  $S = 45589$ .

Но если имѣются готовые  $\lg p$  и  $\lg r$  (какъ въ нашемъ вычисленіи), то еще проще взять  $S = p \cdot r$  (см. § 123); тогда получимъ  $\lg S = 2,75664 + 1,90222 = 4,65886$ .

**Замѣчаніе 1.** При вычисленіи угловъ тѣугольника по тремъ сторонамъ формулы § 123 имѣютъ то преимущество, что по нимъ вычисленіе проще, чѣмъ по другимъ формуламъ, и кромѣ того углы опредѣляются съ большей степенью точности (чѣмъ напр. по синусу или косинусу).

**Замѣчаніе 2.** Въ § 122 п. 1 было указано, что формулы  $\operatorname{cs} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ,  $\operatorname{cs} B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$  и  $\operatorname{cs} C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

вообще неудобны для вычисленія; но можно пользоваться и ими, если дѣйствія въ числитель легко выполняются непосредственно. Пусть напримѣръ:  $a=7$ ;  $b=5$ ;  $c=3$ . Тогда будемъ имѣть:

$$\operatorname{cs} A = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{cs} B = \frac{11}{14}; \quad \operatorname{cs} C = \frac{13}{14}.$$

Отсюда:  $A=120^\circ$ ;  $B=38^\circ 12' 48''$ ;  $C=21^\circ 47' 24''$ .

Падло однако имѣть въ виду, что по косинусу углы опредѣляются менѣе точно: такъ, складывая  $A$ ,  $B$  и  $C$ , получимъ  $180^\circ 0' 12''$ . (Вычисляя по тангенсамъ, мы нашли бы:

$$A=120^\circ, \quad B=38^\circ 12' 46'' \quad \text{и} \quad C=21^\circ 47' 12''^*)$$

---

\*) Значительная разниа при вычисленіи угла  $C$  по косинусу и по тангенсу объясняется тѣмъ, что  $\operatorname{cs} C$  близко къ единицѣ (ср. замѣч. къ § 96).

Нѣкоторые болѣе сложные случаи рѣшенія косоугольных треугольниковъ.

**131. Задача 1.** Даны сторона, противолежащій уголъ и отношеніе двухъ другихъ сторонъ ( $a$ ,  $A$ ,  $b : c = m : n$ ).

*Рѣшеніе.* Зная отношеніе неизвѣстныхъ сторонъ и уголъ между ними, можно найти два другіе угла: для этого положимъ  $b = mx$  и  $c = nx$  и примѣнимъ теорему тангенсовъ\*).

Опредѣливъ  $B$  и  $C$ , поступаемъ какъ въ § 125.

**132. Задача 2.** Определить углы треугольника, если дано отношеніе высотъ  $h_a : h_b : h_c = 3 : 4 : 5$ .

*Рѣшеніе.* Сперва найдемъ отношеніе сторонъ.

Имѣемъ:  $a = \frac{2S}{h_a}$ ;  $b = \frac{2S}{h_b}$  и  $c = \frac{2S}{h_c}$ ; слѣдов.

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5};$$

отсюда  $a : b : c = 20 : 15 : 12^{**})$ .

Всѣ треугольники съ тѣмъ же отношеніемъ сторонъ подобны между собой, слѣдов. имѣютъ одинаковые углы; а потому для опредѣленія этихъ угловъ можно взять любой изъ такихъ треугольниковъ; для вычисленія проще всего взять тотъ изъ нихъ, гдѣ числами 20, 15 и 12 выражаются самыя стороны треугольника. Сдѣлавъ это и поступая, какъ показано въ § 130, получимъ

$$A = 94^\circ 56' 24''; \quad B = 48^\circ 21'; \quad C = 36^\circ 42' 38''.$$

**133. Задача 3.** Даны два угла и сумма противолежащихъ сторонъ ( $A$ ,  $B$ ,  $a + b = m$ ).

*Рѣшеніе.* Сперва по теоремѣ тангенсовъ опредѣлимъ разность  $a - b$  (или  $b - a$ ), а затѣмъ  $a$  и  $b$ . Далѣе какъ въ § 125.

Такъ же поступаемъ и въ случаѣ разности сторонъ.

**134. Задача 4.** Даны сторона, противолежащій уголъ и сумма двухъ другихъ сторонъ ( $a$ ,  $A$ ,  $b + c = m$ ).

\*) При этомъ  $x$  сократится, чѣмъ будетъ тригонометрически доказано, что углы  $B$  и  $C$  не зависятъ отъ абсолютной длины сторонъ  $b$  и  $c$  (иначе: данныя  $b : c = m : n$  и  $A$  достаточны для опредѣленія формы тр-ка).

\*\*) Треугольникъ возможенъ, такъ какъ большая сторона менѣе суммы двухъ другихъ.

*Рѣшеніе. 1-й способъ.* По § 116 имѣемъ  $\frac{b+c}{a} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}$ .

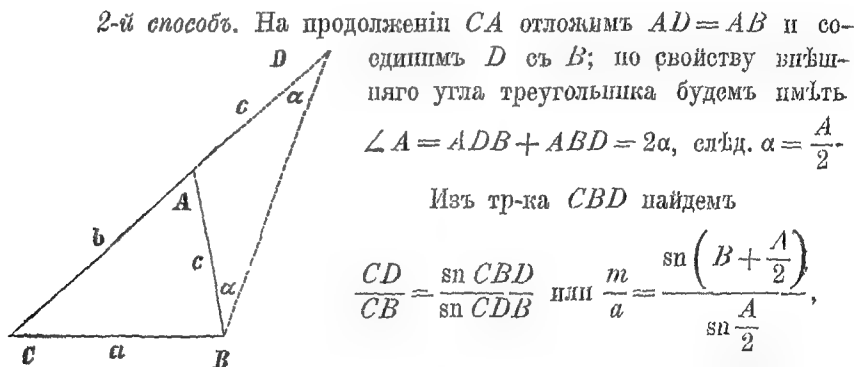
Преобразуемъ вторую часть этого равенства:

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{\sin A} = \frac{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Такимъ образомъ  $\frac{m}{a} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$ ; отсюда  $\cos \frac{B-C}{2} = \frac{m}{a} \cdot \sin \frac{A}{2}$ .

Съ помощью этого равенства опредѣлимъ  $\frac{B-C}{2}$ ; а зная кромѣ того  $\frac{B+C}{2} \left( = \frac{180^\circ - A}{2} \right)$ , найдемъ  $B$  и  $C$ .

Далѣе, зная  $\frac{B+C}{2}$ ,  $\frac{B-C}{2}$  и  $b+c$ , опредѣлимъ  $b-c$  по теоремѣ тангенсовъ, послѣ чего найдемъ  $b$  и  $c$ .



Черт. 55.

*2-й способъ.* На продолженіи  $CA$  отложимъ  $AD = AB$  и соединимъ  $D$  съ  $B$ ; по свойству внѣшняго угла треугольника будемъ имѣть  $\angle A = ADB + ABD = 2\alpha$ , слѣд.  $\alpha = \frac{A}{2}$ .

Изъ тр-ка  $CBD$  найдемъ

$$\frac{CD}{CB} = \frac{\sin CBD}{\sin CDB} \text{ или } \frac{m}{a} = \frac{\sin \left( B + \frac{A}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2}},$$

откуда  $\sin \left( B + \frac{A}{2} \right) = \frac{m}{a} \cdot \sin \frac{A}{2}$ .

<sup>\*</sup>) Это равенство извѣстно подъ именемъ *первой формулы Мольвейде*.

<sup>\*\*</sup>) Сравнивая этотъ результатъ съ полученнымъ въ 1-мъ способѣ, видимъ, что  $\sin \left( B + \frac{A}{2} \right) = \cos \frac{B-C}{2}$ ; предлагаемъ учащемуся подтвердить это равенство инымъ путемъ.

Опредѣливъ  $B + \frac{A}{2}$ , найдемъ  $B$ , а затѣмъ и  $C$ . Далѣе поступаемъ такъ же, какъ въ § 125.

*Замѣчаніе.* При первомъ способѣ, опредѣляя  $\frac{B-C}{2}$  по косинусу, естественно взять *положительный* уголъ\*), т.-е. считать  $b > c$ . Но въ такомъ предположеніи при второмъ способѣ, находя  $B + \frac{A}{2}$  по синусу, надо будетъ взять *тупой* уголъ: дѣйствительно, если  $B > C$ , то  $B + \frac{A}{2} > C + \frac{A}{2}$ , а такъ какъ  $\left(B + \frac{A}{2}\right) + \left(C + \frac{A}{2}\right) = 180^\circ$ , то  $B + \frac{A}{2} > 90^\circ$ .

Предположеніе  $B + \frac{A}{2} < 90^\circ$  соотвѣтствуетъ допущенію  $b < c$  и слѣдов. отрицательному значенію угла  $\frac{B-C}{2}$  при первомъ способѣ

Такимъ образомъ, строго говоря, для искомыхъ элементовъ получимъ два ряда значеній; но нетрудно показать, что *треугольники* будутъ равны (ср. рѣшеніе той же задачи построеніемъ, а также §§ 99, 102, 104 и 145).

**135. Задача 5.** Даны сторона, противолежащій уголъ и разность двухъ другихъ сторонъ ( $a, A, b - c = d$ ).

*Рѣшеніе.* Задача рѣшается подобно предыдущей. При алгебраическомъ способѣ получимъ

$$\frac{d}{a} = \frac{\operatorname{sn} \frac{B-C}{2}^{**})}{\operatorname{cs} \frac{A}{2}};$$
 а при геометрическомъ способѣ

$$\frac{d}{a} = \frac{\operatorname{sn} (B - \varphi)}{\operatorname{sn} \varphi}, \quad \text{гдѣ } \varphi = 90^\circ - \frac{A}{2}.$$

**136. Задача 6.** Даны сторона, прилежащій уголъ и сумма двухъ другихъ сторонъ ( $a, B, b + c = m$ ).

\*) Напомнимъ, что если данному косинусу соотвѣтствуетъ уголъ  $a$ , то ему же соотвѣтствуетъ уголъ  $-a$ .

\*\*) Это есть такъ называемая *вторя формула Мольвейде*.

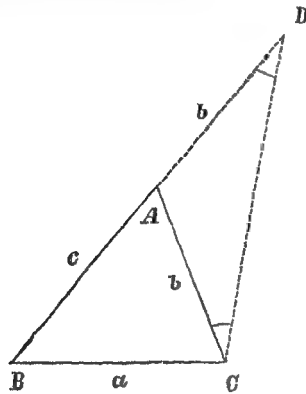
*Рѣшеніе. 1-й способъ.* Имѣемъ  $m+a=b+c+a=2p$  и  $m-a=b+c-a=2(p-a)$ . Теперь перемножимъ формулы

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} *);$$

получимъ  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{p-a}{p}$  или  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{m-a}{m+a};$

съ помощью этого равенства можно опредѣлить неизвѣстный уголъ  $C$ , послѣ чего задача сведется къ § 125.

*2-й способъ.* Давный уголъ заключимъ между данной стороной и суммой неизвѣстныхъ сторонъ; для этого продолжимъ  $BA$  и отложимъ  $AD=AC$ .



Черт. 56.

Соединивъ точки  $D$  и  $C$ , изъ тр-ка  $BDC$  получимъ

$$\frac{BD+BC}{BD-BC} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(BCD+BDC)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(BCD-BDC)}$$

но  $BD+BC=m+a,$

$BD-BC=m-a,$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(BCD+BDC) = \operatorname{ctg} \frac{B}{2} **)$$

и  $\angle BCD-BDC = \angle C.$

Такимъ образомъ будемъ

имѣть  $\frac{m+a}{m-a} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2} : \operatorname{tg} \frac{C}{2} =$

$$= \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

**137. Задача 7.** Даны сторона, прилежащій уголъ и разность двухъ другихъ сторонъ ( $a, C, b-c=d$ ).

*Рѣшеніе. 1-й способъ.* Имѣемъ  $a+d=a+b-c=2(p-c)$  и  $a-d=a-b+c=2(p-b)$ . Раздѣливъ  $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$  на  $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$  (см. предыдущую задачу), получимъ

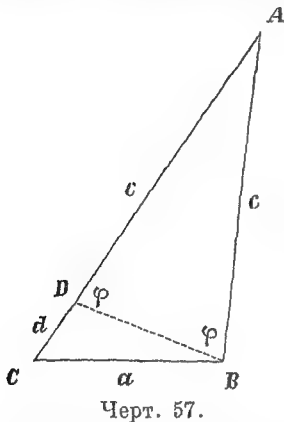
\*)-Указаніе. Должно взять углы противъ неизвѣстныхъ сторонъ.

\*\*) См. § 115 п. 2.

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} : \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{p-c}{p-b} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} : \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{a+d}{a-d};$$

съ помощью этого равенства опредѣлимъ неизвѣстный уголъ  $B$ .

2-й способъ. Заключимъ данный уголъ между данной стороной и разностью неизвѣстныхъ сторонъ, для чего отложимъ  $AD=AB$ .



Точку  $D$  соединимъ съ  $B$ .

Изъ тр-ка  $CDB$  получимъ

$$\begin{aligned} \frac{a+d}{a-d} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} [(180^\circ - \varphi) + (B - \varphi)]}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} [(180^\circ - \varphi) - (B - \varphi)]} \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (180^\circ - 2\varphi + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (180^\circ - B)}; \end{aligned}$$

но  $180^\circ - 2\varphi = A$ ; такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\frac{a+d}{a-d} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{B}{2} \right)} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}}.$$

*Замѣчаніе.* Если дано  $a, B, b-c=d$ , т.-е. если данъ уголъ противъ большей изъ неизвѣстныхъ сторонъ, то рѣшеніе по первому способу останется прежнее, а по второму способу надо продолжить  $AB$ , отложить на полученномъ продолженіи  $BE=d$ \*) и воспользоваться тр-комъ  $CBE$ .

**138. Задача 8.** Даны два угла и периметръ ( $A, B, 2p$ ).

*Рѣшеніе.* 1-й способъ. Находимъ  $C = 180^\circ - (A+B)$ . Далѣе, по § 116 имѣемъ  $2p = 2R (\sin A + \sin B + \sin C)$  или, применяя формулу XXIX,  $2p = 2R \cdot 4 \operatorname{cs} \frac{A}{2} \operatorname{cs} \frac{B}{2} \operatorname{cs} \frac{C}{2}$ ; отсюда

$$2R = \frac{p}{2} \cdot \operatorname{sc} \frac{A}{2} \operatorname{sc} \frac{B}{2} \operatorname{sc} \frac{C}{2}.$$

Съ помощью этого выраженія опредѣлимъ стороны; напримѣръ

$$a = 2R \cdot \sin A = \frac{p}{2} \operatorname{sc} \frac{A}{2} \operatorname{sc} \frac{B}{2} \operatorname{sc} \frac{C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \operatorname{cs} \frac{A}{2} = p \sin \frac{A}{2} \operatorname{sc} \frac{B}{2} \operatorname{sc} \frac{C}{2};$$

\*) Иначе: уголъ смежный съ даннымъ надо заключить между данной стороной и разностью неизвѣстныхъ сторонъ.

\*\*) Применяя соотношеніе  $\operatorname{sc} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cs} \frac{A}{2} = 1$ .

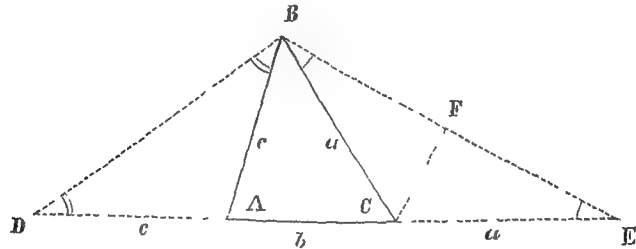
по аналогіи будемъ имѣть для двухъ другихъ сторонъ:

$$b = p \operatorname{sn} \frac{B}{2} \operatorname{sc} \frac{A}{2} \operatorname{sc} \frac{C}{2} \quad \text{и} \quad c = p \operatorname{sn} \frac{C}{2} \operatorname{sc} \frac{A}{2} \operatorname{sc} \frac{B}{2}.$$

Опредѣлимъ еще площадь. Имѣемъ  $S = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sn} A$ ; по предыдущему  $bc = p^2 \cdot \operatorname{sc}^2 \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ , а  $\operatorname{sn} A = 2 \operatorname{sn} \frac{A}{2} \operatorname{cs} \frac{A}{2}$ ; следовательно получимъ

$$S = p^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

2-й способъ. На продолженіяхъ стороны  $AC$  отложимъ  $CE = a$



Черт. 58.

и  $AD = c$  и соединимъ точки  $D$  и  $E$  съ  $B$ ; въ тр-къ  $DBE$  сторона  $DE = 2p$ ,  $\angle D = \frac{A}{2}$  и  $\angle E = \frac{C}{2}$ . Проведя  $CF \perp BE$ , найдемъ  $a = FE : \operatorname{cs} E = \frac{BE}{2} : \operatorname{cs} \frac{C}{2} \dots (1)$ ;  $BE$  опредѣлится изъ тр-ка  $DBE$ , а именно: по теоремѣ синусовъ  $BE : 2p = \operatorname{sn} C : \operatorname{sn} DBE$ ; но  $D = \frac{A}{2}$ , а  $\operatorname{sn} DBE = \operatorname{sn} (D + E) = \operatorname{sn} \left( \frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) = \operatorname{cs} \frac{B}{2}$ ; такимъ образомъ  $BE : 2p = \operatorname{sn} \frac{A}{2} : \operatorname{cs} \frac{B}{2} \dots (2)$ . Отсюда опредѣляемъ  $BE$  и подставляемъ въ равенство (1).

Далѣе какъ въ первомъ способѣ.

3-й способъ. Если требуется произвести вычисленіе, то выгоднѣе пользоваться слѣдующими формулами, полученными на основаніи § 122:

\*) Пользуемся тѣмъ, что  $\operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sc} a = \operatorname{tg} a$ .

$$\frac{p-a}{p} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}^{(*)}, \quad \frac{p-b}{p} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}; \quad \frac{p-c}{p} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

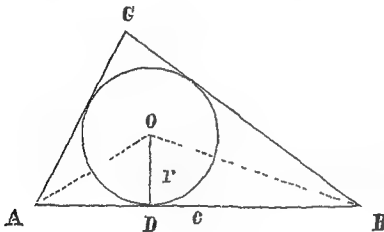
Отсюда напиримѣръ  $a = p - p \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ ; такъ какъ  $p$ ,  $\frac{B}{2}$  и  $\frac{C}{2}$  извѣстны, то для полученія  $a$  вычислимъ отдѣльно произведеніе  $p \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$  и результатъ вычтемъ изъ  $p$ .

Для площади возьмемъ прежнюю формулу

$$S = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}^{**}).$$

**139. Задача 9.** Даны два угла и радиусъ вписаннаго круга ( $A$ ,  $B$ ,  $r$ ).

*Рѣшеніе. 1-й способъ.* Находимъ  $C = 180^\circ - (A + B)$ . Центръ вписаннаго круга соединимъ съ вершинами данныхъ угловъ и проведемъ радиусъ въ точку касанія прилежащен къ нимъ стороны.



Черт. 59

Для опредѣленія этой стороны удобно воспользоваться двоякимъ выраженіемъ площади новаго тр-ка; а именно площадь

тр-ка  $AOB$  выразимъ 1) съ помощью основанія и высоты и 2) по формулѣ XXXVIII; получимъ

$$\frac{c}{2} \cdot r = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{1}{2} A \operatorname{sn} \frac{1}{2} B}{\operatorname{sn}(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B)},$$

$$\text{откуда } c = r \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{1}{2} (A + B)}{\operatorname{sn} \frac{1}{2} A \operatorname{sn} \frac{1}{2} B} \quad \text{или} \quad c = r \cdot \frac{\operatorname{cs} \frac{1}{2} C}{\operatorname{sn} \frac{1}{2} A \operatorname{sn} \frac{1}{2} B};$$

$$\text{по аналогіи: } a = r \cdot \frac{\operatorname{cs} \frac{1}{2} A}{\operatorname{sn} \frac{1}{2} B \operatorname{sn} \frac{1}{2} C} \quad \text{и} \quad b = r \cdot \frac{\operatorname{cs} \frac{1}{2} B}{\operatorname{sn} \frac{1}{2} A \operatorname{sn} \frac{1}{2} C}.$$

\*) См § 136, слѣдующія двѣ формулы составимъ по аналогіи.

\*\*) Предлагаемъ учащемуся вывести эту формулу также изъ трехъ только что указанныхъ.



Опредѣлимъ площадь тр-ка  $ABC$ : имѣемъ  $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$ ; по  $ab = r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} : \sin^2 \frac{C}{2}$ , а  $\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$ ; такимъ образомъ

$$S = r^2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

*2-й способъ.* Если требуется произвести *вычисленіе*, то удобнѣе иной пріемъ. Пусть будутъ  $x$ ,  $y$  и  $z$  отрѣзки сторонъ отъ вершинъ  $A$ ,  $B$  и  $C$  до точекъ касанія (см. черт. 52); тогда

$$x = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2}, \quad y = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \quad \text{и} \quad z = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Вычисливъ отдѣльно  $x$ ,  $y$  и  $z$ , будемъ имѣть:  $a = y + z$ ,  $b = x + z$  и  $c = x + y$ . Площадь опредѣлится по формулѣ

$$S = r \cdot p = r(x + y + z).$$

*Замѣчаніе.* Сравнивая выраженія  $S$  при томъ и другомъ способѣ, заключаемъ, что

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$$

Предлагаемъ учащемуся вывести это соотношеніе изъ равенства  $A + B + C = 180^\circ$ .

**140. Задача 10.** Даны высота и углы при основаніи ( $h_c$ ,  $A$ ,  $B$ ).

*Рѣшеніе.* При пользованіи чертежомъ мы должны были бы отдѣльно разобрать два случая: 1)  $h_c$  внутри треугольника и 2)  $h_c$  внѣ треугольника; удобнѣе поэтому не дѣлать чертежа, а воспользо-ваться формулами, общность которыхъ уже доказана.

Сначала опредѣлимъ  $c$  изъ двоякаго выраженія площади треугольника:

$$\frac{c}{2} \cdot h_c = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin A \cdot \sin B^*)}{\sin(A+B)}; \quad \text{отсюда} \quad c = h_c \cdot \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B}.$$

Далѣе, каковы бы ни были углы  $A$  и  $B$ , имѣемъ по § 121  $h_c = a \cdot \sin B$  и  $h_c = b \cdot \sin A$ ; отсюда  $a = \frac{h_c}{\sin B}$  и  $b = \frac{h_c}{\sin A}$ .

Площадь опредѣлится по формулѣ  $S = \frac{c}{2} \cdot h_c$ .

---

\*) См. замѣчаніе къ § 124.

141. *Задача 11.* Даны две стороны и площадь ( $b$ ,  $c$ ,  $S$ ).

*Рѣшеніе.* Изъ формулы  $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$  слѣдуетъ  $\sin A = \frac{2S}{bc}$ .

Задача невозможна, если  $2S > bc$ ; уголъ  $A$  прямой, если  $2S = bc$ ; наконецъ, уголъ  $A$  имѣетъ два значенія ( $A_1 = \varphi$  и  $A_2 = 180^\circ - \varphi$ ), если  $2S < bc^*$ ) (сторона  $a$  не можетъ вліять на выборъ угла  $A$ , потому что сама зависитъ отъ него).

Опредѣливъ  $A$ , будемъ имѣть основной случай ( $b$ ,  $c$ ,  $A$ ).

142. *Задача 12.* Даны площадь, сумма двухъ сторонъ и уголъ между ними ( $S$ ,  $b + c = m$ ,  $A$ ).

*Рѣшеніе.* Имѣемъ  $b + c = m$ , а изъ формулы  $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$  найдемъ  $bc = \frac{2S}{\sin A}$  такимъ образомъ  $b$  и  $c$  равны корнямъ уравненія

$$x^2 - mx + \frac{2S}{\sin A} = 0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ  $x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{2S}{\sin A}}$ ; поступая теперь, какъ показано въ § 83, и полагая  $\frac{8S}{m^2 \cdot \sin A} = \sin^2 \varphi$ , приведемъ корни уравненія къ виду

$$x_1 = m \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = m \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Одинъ изъ этихъ корней принимаемъ за  $b$ , а другой за  $c$ .

Далѣе будемъ имѣть основной случай ( $b$ ,  $c$ ,  $A$ ).

*Замѣчаніе.* Сторону  $a$  нетрудно также выразить съ помощью данныхъ. Имѣемъ  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ ; придавая ко второй части этого равенства разность  $2bc - 2bc$ , получимъ

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos A) = (b + c)^2 - 4bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2}; \quad \text{подставляя}$$

сюда  $b + c = m$  и  $bc = \frac{2S}{\sin A}$ , будемъ имѣть въ окончательномъ видѣ

$$a = \sqrt{m^2 - 4S \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}.$$

---

\*) Предлагаемъ учащемуся иллюстрировать эту двойственность геометрически.

**143. Задача 13.** Даны высота, боковая сторона и противолежащий ей угол ( $h_a$ ,  $b$ ,  $B$ ).

*Решение.* По § 121 имеем  $h_a = b \cdot \sin C$ , откуда  $\sin C = \frac{h_a}{b}$ .

Так как  $h_a < b^*)$ , то  $\sin C < 1$  и представляется вопрос, имеем ли в треугольнике угол  $C$  два значения ( $\varphi$  и  $180^\circ - \varphi$ ) или только одно из них. Для этого обратим внимание еще на стороны  $c$  и  $a$ : сторона  $c$  определится независимо от  $C$  (из уравнения  $h_a = c \cdot \sin B$ ) и потому имеет влияние на выбор этого угла; а сторона  $a$  сама определится по нему

$$\left[ a = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin A = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin (B + C) \right];$$

следовательно вопрос решается только сравнением сторон  $c \left( = \frac{h_a}{\sin B} \right)$  и  $b$ . Таким образом исследование сходно с тем, какое содержится в § 127.

Пусть напр.  $\frac{h_a}{\sin B} > b^{**})$ ; тогда задача допускает следующие два решения<sup>\*\*\*)</sup>.

$$h_a, b, B \left\| c = \frac{h_a}{\sin B} \begin{cases} C_1 = \varphi \\ C_2 = 180^\circ - \varphi \end{cases} \begin{cases} A_1 = 180^\circ - (B + \varphi) \\ A_2 = \varphi - B \end{cases} \begin{cases} a_1 = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin A_1 \\ a_2 = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin A_2 \end{cases}$$

Для площади получим  $S_1 = \frac{a_1}{2} \cdot h_a$  и  $S_2 = \frac{a_2}{2} \cdot h_a$ .

**144. Задача 14.** Даны две стороны и равнобедренный угол между ними ( $b$ ,  $c$ ,  $l$ ).

*Решение.* Выразим, что площадь треугольника равна сумме частей, на которые делит ее прямая  $l$ ; получим

$$\frac{bc}{2} \cdot \sin A = \frac{bl}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{cl}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}$$

<sup>\*</sup>) Предполагаем, что задача возможна и  $h_a$  не равно  $b$ .

<sup>\*\*)</sup> При этом необходимо  $B < 90^\circ$

<sup>\*\*\*)</sup> Предлагаем учащемуся иллюстрировать их геометрически.

или  $bc \cdot \sin A = (b+c)l \cdot \sin \frac{A}{2}$ . Представивъ теперь полученное уравнение въ видѣ

$$bc \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = (b+c)l \cdot \sin \frac{A}{2},$$

найдемъ, что корни его суть

$$1) \sin \frac{A}{2} = 0 \quad \text{и} \quad 2) \cos \frac{A}{2} = \frac{(b+c)l}{2bc}.$$

Первый корень непригоденъ для задачи, а второй доставитъ отвѣтъ, если только  $(b+c)l < 2bc^*$ .

Опредѣливъ  $A$ , придемъ къ основному случаю ( $b, c, A$ ).

**145. Задача 15.** Даны основание, высота и уголъ при вершинѣ ( $b, h, B$ ).

*Рѣшеніе.* Имѣемъ  $h_b = a \cdot \sin C$  и  $a = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin A$ ;

слѣдов.  $h_b = b \cdot \frac{\sin A \cdot \sin C}{\sin B}$ ; отсюда  $\sin A \cdot \sin C = \frac{h}{b} \cdot \sin B \dots (1)$ ;

углы  $A$  и  $C$  связаны еще уравненіемъ  $A + C = 180^\circ - B \dots (2)$ ; такимъ образомъ приходимъ къ рѣшенію тригонометрической системы уравненій. Замѣнимъ, что

$2 \sin A \cdot \sin C = \cos(A - C) - \cos(A + C)$  и  $\cos(A + C) = -\cos B$ ;

слѣдовательно

$$2 \sin A \cdot \sin C = \cos(A - C) + \cos B.$$

Съ помощью этого преобразования и уравненія (1) получимъ

$$\cos(A - C) = \frac{2h}{b} \cdot \sin B - \cos B,$$

а полагая  $\frac{2h}{b} = \operatorname{ctg} \varphi$ , приведемъ это равенство къ виду

$$\cos(A - C) = \frac{\sin(B - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Теперь, опредѣливъ сначала  $\varphi$ , найдемъ затѣмъ  $A - C$ , послѣ чего будемъ имѣть извѣстными  $A - C$  и  $A + C$ .

---

\*)  $\cos \frac{A}{2} = 1$  будетъ непригодно для задачи.

Стороны  $a$  и  $c$  опредѣляются изъ уравненій

$$h_b = a \cdot \sin C \quad \text{и} \quad h_b = c \cdot \sin A.$$

*Числовой примѣръ.* Положимъ  $b = 10$ ,  $h_b = 5$  и  $B = 25^\circ$ .

Тогда  $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{2h}{b} = 1$ , слѣдовательно  $\varphi = 45^\circ$ .

Послѣ этого будемъ имѣть

$$\cos(A - C) = \frac{\sin(25^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sin(-20^\circ)}{\sin 45^\circ} = -\frac{\sin 20^\circ}{\sin 45^\circ}.$$

Означимъ черезъ  $\alpha$  табличный уголъ, котораго косинусъ равенъ  $\frac{\sin 20^\circ}{\sin 45^\circ}$ ; тогда  $A - C = \pm(180^\circ - \alpha)$ .

Вычисляя  $\alpha$ , получимъ  $61^\circ 4' 26''$ ; слѣдовательно будемъ имѣть:

1-о-первыхъ		во-вторыхъ
$A - C = 118^\circ 55' 34''$		$A - C = -118^\circ 55' 34''$
$A + C = 155^\circ$		$A + C = 155^\circ$
<hr style="width: 100%; border: 0; border-top: 1px solid black;"/>		<hr style="width: 100%; border: 0; border-top: 1px solid black;"/>
$A = 136^\circ 57' 47''$		$A = 18^\circ 2' 13''$
$C = 18^\circ 2' 13''$		$C = 136^\circ 57' 47''$

(При построении этому соответствуетъ двоякое положеніе иско-  
мой вершины на дугѣ, вмѣщающей данный уголъ).

Треугольники получаются *равные*.

## ОБЪ ИЗМѢРЕНІЯХЪ НА МѢСТНОСТИ.

---

### XI. Измѣреніе линій и угловъ на земной поверхности. Простѣйшіе угломерные инструменты.

**146. Общее замѣчаніе.** При составленіи землемерныхъ плановъ, а также и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ, приходится опредѣлять величину линій и угловъ, назначаемыхъ на *мѣстности*. Эту величину находятъ или непосредственнымъ измѣреніемъ — съ помощью особыхъ приборовъ, или же посредствомъ вычисленія — по тѣмъ даннымъ, какія получены уже ранѣе; въ послѣднемъ случаѣ требуется примѣненіе тригонометріи.

Дать понятіе о томъ и другомъ способѣ и составляетъ цѣль предстоящаго изложенія.

**147. Измѣреніе линій.** Прямая линія на мѣстности указывается какими-нибудь хорошо замѣтными предметами, помѣщенными на ея концахъ. Если длина измѣряемой линіи значительна, то ее надо сначала *протянуть*, т.-е. поставить рядъ *вѣхъ*<sup>1)</sup> по ея направленію.

Для непосредственнаго измѣренія линіи на мѣстности наиболѣе употребительны *землемерная цѣпь* и *мерительная лента*.

Цѣпь дѣлается изъ негнбкой желѣзной проволоки. Она имѣетъ длину 10 саж. и состоитъ изъ 100 прямыхъ звеньевъ, соединенныхъ промежуточными кольцами; разстояніе между центрами двухъ послѣдовательныхъ колецъ равно 0,1 саж.\*).

---

<sup>1)</sup> Вѣха — длинный коль со значкомъ.

\*) Существуютъ также цѣпи, составленные изъ 70 футовъ.

Мѣрительная лента изготовляется изъ тонкой стальной полосы. Она имѣетъ длину также 10 саж. и раздѣлена на десятичные доли сажени.

При пользованіи цѣпью и мѣрительной лентой длина линій выражается въ саженихъ и десятихъ доляхъ сажени.

Не касаясь здѣсь практическихъ приѣмовъ измѣренія, упомянемъ еще о степени его точности. — Принято считать, что ошибка при измѣреніи цѣпью не превышаетъ 1 саж. на 500 саж., а точность измѣренія стальной лентой вдвое болѣе. Для большей надежности результата линію измѣряютъ не одинъ разъ, а нѣсколько разъ, и берутъ среднее арифметическое изъ полученныхъ чиселъ.

**148. Измѣреніе угловъ.** Измѣреніе угловъ на мѣстности бываетъ двоякое: или 1) уголъ получаютъ *графически*, т.-е. между двумя линіями на бумагѣ, или же 2) опредѣляютъ *градусную величину* угла.

Мы рассмотримъ только второй способъ, какъ имѣющій отношеніе къ тригонометріи.

**149. Угломѣрные инструменты.** Инструменты, служащіе для опредѣленія *градусной величины* угла, называются *угломѣрными*.

Одни изъ нихъ служатъ для опредѣленія угла только въ горизонтальной плоскости, другіе же измѣряютъ уголъ и въ горизонтальной и въ вертикальной плоскости. (Углы въ наклонной плоскости опредѣляются обыкновенно съ помощью *вычисленія*).

Простейшіе угломѣрные инструменты суть *буссоль* и *астролябія*.

**150.** Чтобы легче было понять ихъ устройство, укажемъ сначала *составныя части угломѣрнаго инструмента вообще*.

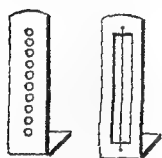
Главныя части суть *лимбъ* и *алидада*.

*Лимбомъ* называется кругъ, раздѣленный на градусы; при измѣреніи угла лимбъ устанавливается въ плоскости этого угла, центромъ въ его вершинѣ.

*Алидадой* называется линейка, которая вращается въ плоскости лимба около его центра; при измѣреніи угла она направляется по его сторонамъ, — *наводится* на какой-либо предметъ на этой сторонѣ.

Для наведенія алидады, — для *визирования*, — къ ней придѣляются особые приборы, называемые *визирными*; простѣйшій изъ

нихъ — *диоптры*. Они изображены отдѣльно на черт. 60; это двѣ пластинки съ прорѣзами, прикрѣпляемыя на концахъ алидады перпендикулярно къ ней. Одинъ диоптръ имѣетъ рядъ небольшихъ круглыхъ отверстій<sup>1)</sup>, а въ другомъ вырѣзана широкая полоса.



Черт. 60.

въ серединѣ ея натянута черная конскій волосъ. Центры круглыхъ отверстій и волосокъ должны находиться въ одной плоскости; она называется *коллимационной*; эта плоскость должна быть перпендикулярна къ плоскости лимба и проходить черезъ его центръ; ея пересѣченія съ краями алидады отмѣчаются на этихъ краяхъ особыми штрихами.

При визированіи на какую-либо точку ставятъ алидаду такъ, чтобы для глаза, смотрящаго въ диоптръ съ круглыми отверстіями, точка была закрыта волоскомъ другого диоптра.

Угломѣрный инструментъ помѣщается обыкновенно на раздвижномъ треножникѣ; но между треножникомъ и инструментомъ вводится еще снаряжь, позволяющій склонять плоскость лимба такъ или иначе. Простѣйшее изъ такихъ приспособленій есть *бакса*: это особаго рода сферическія клещи, охватывающія шаръ, которымъ внизу оканчивается ось лимба; такимъ образомъ лимбъ можетъ вращаться около оси, а самая ось мѣнять свое направленіе.

Для установки лимба въ горизонтальной плоскости служитъ *уровень*, а въ вертикальной плоскости — *отвѣсъ*<sup>2)</sup>.

Для установки лимба центромъ надъ вершиною измѣряемаго угла служитъ отвѣсъ съ заостренной гирькой.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію буссоли и астролябіи.

**151. Буссоль** служитъ для измѣренія *горизонтальныхъ* угловъ и основана на свойствѣ *магнитной стрѣлки* принимать одно и то же опредѣленное положеніе.

Приборъ состоитъ изъ цилиндрической коробки, внутри которой закрѣплено плоское гадусное кольцо, а надъ нимъ, — на остріѣ, — помѣщена магнитная стрѣлка, служащая какъ бы его

<sup>1)</sup> Въмѣсто нихъ дѣлаютъ также сплошной узкій прорѣзь.

<sup>2)</sup> Если инструментъ имѣетъ баксу, то лимбъ можетъ держаться и въ наклонной плоскости; но такую установку приходится дѣлать *глазomъ* и потому ей почти не пользуются.



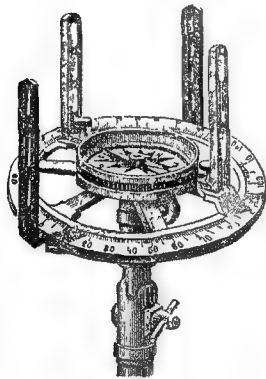
діаметромъ. Для визированія придѣлываютъ діоптры къ самой коробкѣ, или же она утверждается на алидадѣ; коллимаціонная плоскость діоптровъ проводится черезъ діаметръ кольца, при чемъ этотъ діаметръ принимаютъ за нулевой.

При повертываніи коробки около ся оси магнитная стрѣлка сохраняетъ свое направленіе, а градусныя дѣленія кольца одно за другимъ проходятъ подъ стрѣлкой.

Измѣреніе буссолью сводится къ слѣдующему: поставивъ инструментъ въ вершинѣ угла, визируютъ по его сторонѣ и замѣчаютъ, противъ какого дѣленія кольца приходится сѣверный конецъ стрѣлки; то же самое повторяютъ для второй стороны угла; по этимъ двумъ наблюденіямъ и опредѣляютъ уголъ<sup>1)</sup>.

Наибольшая точность измѣренія угловъ буссолью,— до 15'.

**152. Астролябія** состоитъ изъ лимба, алидады и двухъ паръ діоптровъ (см. черт. 61). Два діоптра прикрѣплены къ лимбу на концахъ его нулевого діаметра; они называются *неподвижными*. Другіе два помѣщаются на концахъ алидады и называются *подвижными*; при нихъ находятся *верньеры*.



Черт. 61.

Лимбъ дѣлится на градусы и даже полуградусы; верньеры показываютъ 5'. Коллимаціонная плоскость неподвижныхъ діоптровъ проходитъ черезъ нулевой діаметръ лимба; коллимаціонная плоскость подвижныхъ діоптровъ — черезъ нули обоихъ верньеровъ.

Для ориентированія линій относительно странъ свѣта къ астролябіи присоединяется еще магнитная стрѣлка.

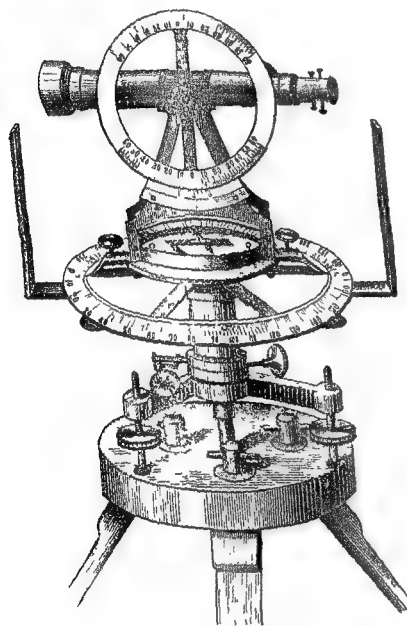
**153.** Чтобы измѣрить *горизонтальный уголъ* (или проекцію угла на горизонтальную плоскость), сначала устанавливаютъ лимбъ горизонтально, центромъ надъ вершиной угла; затѣмъ, сохраняя

<sup>1)</sup> При этомъ способѣ *склоненіе* магнитной стрѣлки не оказываетъ вліянія, если только оно одинаково при обоихъ визированіяхъ.

горизонтальность лимба, повертывают его около центра, пока сквозь неподвижные диоптры не увидят какой-нибудь предмет, находящийся на одной из сторон угла; не изменяя теперь положенія лимба, ставят подвижные диоптры по направленію другой стороны угла; наконецъ дѣлаютъ отсчетъ по дугѣ лимба между диоптрами.

Точность измѣренія горизонтальнаго угла — около 5'.

154. Чтобы измѣрить уголъ между прямой линіей *AB* и горизонтальной плоскостью (*уголъ наклоненія* прямой линіи),



Черт 62 (къ § 155).

устанавливаютъ лимбъ въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ данную линію, такъ, чтобы его центръ находился на данной линіи; затѣмъ, удерживая лимбъ въ той же плоскости, повертываютъ его около центра до тѣхъ поръ, пока діаметръ  $90^\circ - 270^\circ$  не станетъ по отвѣсу; коллимаціонная плоскость неподвижныхъ диоптровъ будетъ тогда горизонтальна; теперь, не изменяя положенія лимба, направляютъ алидаду по линіи *AB* и отсчитываютъ дугу между диоптрами.

Точность этого измѣренія не болѣе какъ до 15' \*).

155. Для болѣе точнаго визированія на отдаленные предметы<sup>1)</sup>

\*) Меньшая точность измѣренія въ случаѣ вертикальнаго угла объясняется менѣе точной установкой инструмента.

<sup>1)</sup> Сквозь диоптры ихъ почти нельзя видѣть — по недостатку свѣта.

діоптры замѣняются *зрительной трубой*<sup>1)</sup>, а для угловъ наклоненія присоединяется особый *вертикальный кругъ*; точность отсчитыванія въ этомъ случаѣ доводится (съ помощью верньеровъ) до 1. Одна изъ такихъ усовершенствованныхъ астролябій изображена на черт. 62; для большей устойчивости, она помѣщается не на баксѣ, а на подъемныхъ винтахъ

**156.** Въ случаяхъ, требующихъ *особой точности* измѣненія, пользуются *теодолитомъ*.

Теодолитъ отличается отъ астролябии главнымъ образомъ болѣею плавностію движенія частей и болѣею устойчивостію.

Въ лучшихъ теодолитахъ точность отсчитыванія доходитъ до 10" (лимбъ раздѣленъ на шестыя доли градуса, а на верньерахъ дуга въ 59 дѣленій лимба раздѣлена на 60 равныхъ частей).

---

<sup>1)</sup> Чтобы можно было визировать на *точку* предмета, внутри этой трубы устраивается *стъка* изъ паутинныхъ нитей, на которую и принимаютъ *дѣйствительное* изображеніе предмета.

## ХII. Приложение прямолинейной тригонометрии къ производству измѣреній на мѣстности.

**157. Общее замѣчаніе.** Мы рассмотримъ здѣсь только *простѣйшія* примѣненія тригонометрии, а именно: 1) опредѣленіе неприступныхъ\*) разстояній, 2) опредѣленіе высотъ и 3) составленіе триангуляціи. При этомъ мы ограничимся только случаемъ такой мѣстности, которая можетъ считаться горизонтальной плоскостью или по крайней мѣрѣ позволяетъ проводить по нѣкоторымъ направленіямъ горизонтальныя линіи.

Непосредственное измѣреніе *линій* на мѣстности представляетъ двоякую трудность: 1) затруднителенъ самый процессъ измѣренія и 2) если взятая линія не есть прямая, или если она не горизонтальна, то приходится дѣлать разнаго рода *поправочныя* измѣренія и вычисленія. Углы же измѣряются и легче, и несравненно точнѣе. Поэтому стараются измѣреніе линіи замѣнить, насколько возможно, измѣреніемъ угловъ; линіи же опредѣляютъ преимущественно посредствомъ *вычисленія*. Большею частію даже ограничиваются измѣреніемъ только *одной* линіи; ее называютъ тогда *базисомъ*<sup>1)</sup>.

Сдѣланныя замѣчанія необходимо имѣть въ виду при рѣшеніи названныхъ выше задачъ, къ которымъ мы теперь и переходимъ.

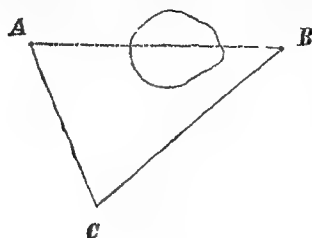
**158. Опредѣленіе неприступныхъ разстояній.** Здѣсь могутъ быть три случая: 1) обѣ кончныя точки доступны; 2) доступна только одна изъ конечныхъ точекъ и 3) обѣ конечныя точки недоступны.

Рассмотримъ каждыя случаи. Точки, между которыми опредѣляется разстояніе, означимъ черезъ *A* и *B*.

---

\*) Т.-е. не допускающихъ непосредственнаго измѣренія.

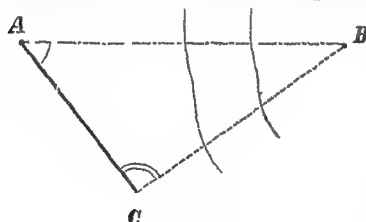
*1-й случай. Точки A и B доступны.* Рѣшеніе. а) Если точки A и B не видны одна изъ другой, то выбираютъ такую точку C, изъ которой были бы видны тѣ двѣ, и измѣряютъ уголъ ACB и линіи CA и CB; по этимъ даннымъ вычисляютъ разстояніе AB\*).



Черт. 63.

б) Если же точки A и B видны одна изъ другой, то измѣряютъ линію AC и углы A и C; этихъ данныхъ достаточно для вычисленія AB\*\*).

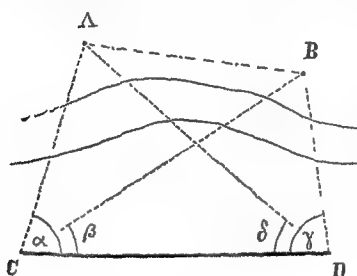
*2-й случай. Точка A доступна, а точка B недоступна* (т.-е. наблюдатель имѣетъ возможность подойти къ точкѣ A, а отъ точки B отдѣленъ какимъ-либо препятствіемъ).



Черт. 64.

Рѣшеніе. Взявъ точку C такъ, чтобы изъ нея были видны A и B, измѣряютъ углы A и C и базисъ AC. Линію AB тогда нетрудно вычислить, такъ какъ въ тр-кѣ ABC будутъ извѣстны сторона и два угла.

*3-й случай. Точки A и B недоступны.* Рѣшеніе. Выбравъ въ доступной мѣстности точки C



Черт. 65.

и D такъ, чтобы изъ нихъ были видны A и B, измѣряютъ базисъ CD и углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ . Изъ двухъ треугольниковъ, содержащихъ CD, вычисляютъ CA и CB; уголъ между этими линіями равенъ  $\alpha - \beta$ ; такимъ образомъ можно будетъ вычислить AB изъ тр-ка ACB.

\*) Съ цѣлью проверки принято искомыя линіи вычислять двумя различными способами: такъ въ настоящемъ случаѣ, вычисливъ углы A и B (§ 126), можно сторону c найти по формулѣ  $c = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin C$  и по формулѣ

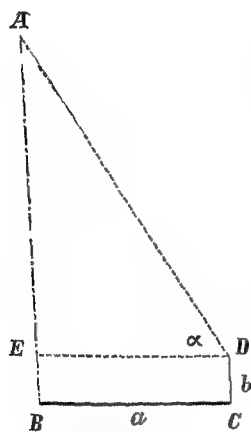
$$c = \frac{b}{\sin B} \cdot \sin C.$$

\*\*) Для большей точности измѣряютъ также и уголъ B и сумму угловъ сравниваютъ съ  $180^\circ$ : если окажется разнища, то ее разлагаютъ поровну на всѣ три угла.

Можно также начать вычисленіе съ линій  $DA$  и  $DB$ , заключающихъ углы  $\gamma - \delta$ , и опредѣлять  $AB$  изъ треугольника  $ADB$ . Этотъ второй способъ послужитъ для перваго повѣркой, которая особенно полезна въ настоящемъ случаѣ — въ виду сложности вычисленія.

**159. Опредѣленіе высоты.** Разберемъ главные случаи этой задачи.

*1-й случай. Основаніе<sup>1)</sup> доступно.* Положимъ на примѣръ, что измѣряемая высота есть  $AB$  (черт. 66), при чемъ точка  $B$  доступна.



Черт. 66.

*Рѣшеніе.* Изъ точки  $B$  проводятъ на мѣстности какую-нибудь горизонтальную линію  $BC$  \*) и измѣряютъ ея длину; положимъ, что эта длина есть  $a$ .

Послѣ этого надъ точкой  $C$  ставятъ астролябію съ вертикальнымъ лимбомъ такъ, чтобы центръ лимба  $D$  былъ надъ самой точкой  $C$ , и опредѣляютъ уголъ наклоненія линіи  $DA$  — способомъ, объясненнымъ въ § 154; пусть будетъ этотъ уголъ равенъ  $\alpha$ .

Измѣряютъ еще — по отвѣсу — разстояніе  $DC$ ; положимъ, что получилось  $DC = b$ .

Зная  $a$ ,  $\alpha$  и  $b$ , будемъ имѣть для вычисленія высоты

$$AB = AE + EB = a \operatorname{tg} \alpha + b.$$

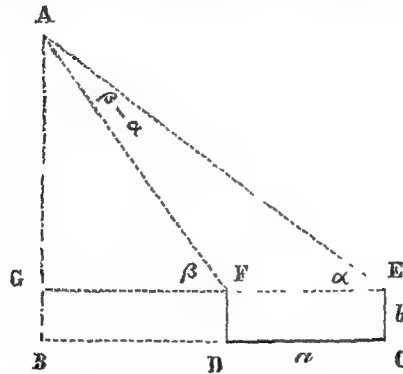
*2-й случай. Основаніе недоступно.* Пусть на черт. 67 высота  $AB$  представляетъ примѣръ такого случая. Предположимъ еще, что окружающая мѣстность горизонтальна.

*Рѣшеніе.* Выбираютъ на мѣстности какую-нибудь достаточно удаленную точку  $C$ . Помѣщаютъ надъ этой точкой астро-

<sup>1)</sup> Т.-е. проекція вершины на ту горизонтальную плоскость, отъ которой считается высота.

\*) Случай, когда мѣстность не допускаетъ такой линіи, мы не будемъ разсматривать.

лябію п, поставивъ лимбъ вертикально, измѣряютъ уголъ наклоненія линіей  $EA^*$ ). Затѣмъ, не измѣняя положенія лимба,



Черт. 67.

съ помощью неподвижныхъ діоптровъ назначаютъ на мѣстности какую-нибудь линію  $CD$  по направленію плоскости лимба, а слѣдовательно въ одной плоскости съ  $AB$ . Эту линію измѣряютъ какъ базисъ. Наконецъ переносятъ въ точку  $D$  астролябію и, поставивъ ее на той же высотѣ, какъ въ точкѣ  $C$ , опредѣляютъ уголъ наклоненія линіи  $FA$ .

Послѣ сдѣланныхъ измѣреній нетрудно вычислить  $AB$ ; пусть наприимѣръ получилось:  $CD=a$ ,  $FD=EC=b$ ,  $\angle AEG=\alpha$  и  $\angle AFG=\beta$ . Тогда  $AB=AG+BG=AF \cdot \sin \beta + b$ ; а изъ треугольника  $AFE$  найдемъ  $AF = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)} \cdot \sin \alpha$ ; такимъ образомъ

$$AB = \frac{a \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\beta-\alpha)} + b.$$

**160. Триангуляція.** Производя съемку мѣстности, можно поступить такимъ образомъ: снять во всей подробности какой-либо небольшой участокъ, отъ него перейти къ смежному, отъ этого къ третьему и т. д., пока не снимемъ всю назначенную мѣстность; она будетъ при этомъ возникать на планѣ послѣдовательно, небольшими и сполна отдѣланными участками.

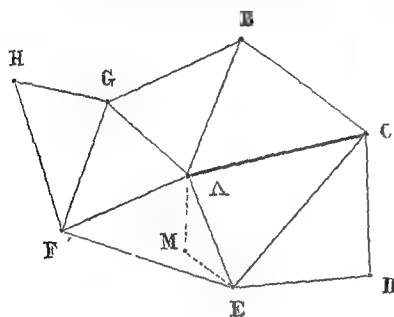
Но такой способъ неудобенъ, если снимаемое пространство значительно: при *последовательной* съемкѣ погрѣшности въ измѣреніяхъ и вычисленіи *накаплиются* и тѣмъ болѣе, чѣмъ далѣе уходимъ отъ основного участка. Поэтому въ такихъ случаяхъ съемку дѣлаютъ не послѣдовательно, а *переходя отъ общаго къ частному*, т.-е. сначала по всей мѣстности опредѣляютъ возможно точнѣе положеніе *немногихъ основныхъ точекъ*<sup>1)</sup> и уже съ ними

\*) Черезъ  $E$  означенъ центръ лимба.

<sup>1)</sup> Наиболѣе выгодныхъ для съемки.

связываютъ разработку подробностей: тогда ошибки одного участка могутъ и не вліять на другой, если ихъ исходные пункты различны.

Пусть  $A, B, \dots, G, H$  суть главные точки мѣстности, т.-е. точки, служащія основаніемъ съемки. Соединивъ ихъ напимѣрь



Черт. 68.

такъ, какъ показано на черт. 68, получимъ сѣтъ треугольников<sup>1)</sup>; она называется *триангуляціей*<sup>2)</sup>. Чтобы опредѣлить взаимное положеніе этихъ точекъ, измѣряютъ все углы сѣти и одну изъ сторонъ, напимѣрь  $AC$ . Тогда сначала рѣшаютъ треугольникъ, содержащій базисъ, отъ этого треугольника переходятъ къ смежному и т. д.<sup>3)</sup>; полученіе одной и той же сто-

роны изъ двухъ треугольниковъ (напр. стороны  $AG$  изъ тр-ковъ  $ABG$  и  $AFG$ ) служитъ повѣркой вычисленія.

Изъ сказаннаго ясно, что погрѣшность въ измѣреніи базиса отражается на всемъ послѣдующемъ вычисленіи; поэтому онъ долженъ быть измѣренъ со всей возможной точностью. Углы измѣряютъ также при помощи очень точныхъ инструментовъ (теодолитовъ).

Когда составлена уже триангуляція, то, чтобы опредѣлить положеніе какой-либо новой точки, напимѣрь  $M$ , надо ее связать съ однимъ изъ звеньевъ триангуляціи, напр. измѣрить углы  $MAE$  и  $MEA$ . Линіи  $MA$  и  $ME$  въ свою очередь могутъ служить базами для съемки еще болѣе мелкихъ подробностей; и т. д.

<sup>1)</sup> Стороны такихъ треугольниковъ иногда содержатъ по нѣскольку верстъ.

<sup>2)</sup> Название «триангуляція» иногда прилагается и къ самому способу съемки.

<sup>3)</sup> Рѣшая треугольникъ каждый разъ по сторонамъ и тремъ угламъ.



## ПРИБАВЛЕНІЯ.

Къ § 6. Обычное дѣленіе окружности на  $360^\circ$  и т. д. получило свое начало еще въ древности. Число 360 было выбрано, можетъ-быть, потому, что оно очень удобно въ практическомъ отношеніи, такъ какъ имѣетъ 22 дѣлителя.

Въ концѣ XVIII столѣтія, во Франціи, при введеніи метрической системы мѣръ предложено было также и *десятичное* дѣленіе окружности, по которому окружность содержитъ четыреста градусовъ, градусъ — сто минутъ и минута — сто секундъ<sup>1)</sup>; но это новое дѣленіе вскорѣ же было оставлено. Тѣмъ не менѣе оно нерѣдко встрѣчается теперь на *геодезическихъ*<sup>2)</sup> инструментахъ и принято за границей многими геодезистами, какъ болѣе удобное для вычисленій.

Къ §§ 26 и 25. Измѣненія тригонометрическихъ функцій *по отдельнымъ четвертямъ* можно прослѣдить еще иначе, а именно съ помощью формулъ § 32. Покажемъ этотъ способъ, а кромѣ того дадимъ и болѣе строгій выводъ тѣхъ *предположъ*, которые считаются значеніями функцій для концовъ четверти.

1. Измѣненія синуса и косинуса рассмотримъ такъ же, какъ и раньше, т.-е. по чертежу, — который, между прочимъ, легко удерживается и въ памяти.

Что касается въ частности, значеній 0, — 1, и 1, то для нихъ докажемъ слѣдующее: *если подвижной радиусъ неопредѣленно*

---

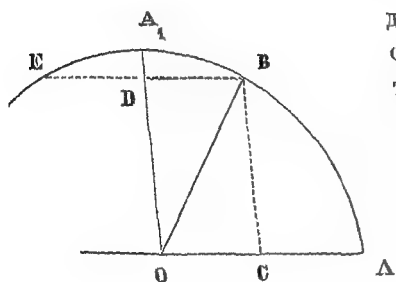
<sup>1)</sup> Въ новой системѣ для градуса принять знакъ *g*, минута и секунда обозначаются попрежнему (такъ пишутъ  $13^g 40' 35''$ ).

<sup>2)</sup> *Геодезія* (практическая геометрія) занимается различными измѣреніями на земной поверхности.

приближается къ главному діаметру, то его проекція на этот діаметръ имѣетъ предѣльный радіусъ, а проекція на другой главный діаметръ неопредѣленно уменьшается.

Дѣйствительно: 1) Такъ какъ хорда  $BE$  менѣе дуги  $BA_1E$ ,

то линія  $OC$ , равная  $BD$ , менѣе дуги  $BA_1$  и потому также неопредѣленно уменьшима. 2) Изъ треугольника  $OBD$  находимъ, что  $OB - OD < BD$  и слѣдовательно  $OB - OD < BA_1$ ; если же  $BA_1$  неопредѣленно уменьшается, то длина  $OB$  есть предѣлъ длины  $OD$ .



Черт. 69

II. Освоившись съ измѣненіями синуса и косинуса, легко уже относительно остальныхъ функций соображать по ихъ за-

висимости отъ первыхъ двухъ. Приведемъ примѣры.

1) Укажемъ ходъ тангенса во II четверти. — Имѣемъ  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cs} \alpha}$ . Заключая по измѣненіямъ числителя и знаменателя объ измѣненіи самой дроби, найдемъ, во-первыхъ, что во II четверти тангенсъ отрицателенъ, потому что синусъ и косинусъ здѣсь имѣютъ *разные* знаки<sup>1)</sup>; во-вторыхъ, по абсолютной величинѣ синусъ уменьшается, косинусъ увеличивается, слѣдовательно тангенсъ уменьшается. Для концовъ II четверти получимъ

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\operatorname{sn} 90^\circ}{\operatorname{cs} 90^\circ} = \frac{1}{-0} = -\infty^*) \text{ и } \operatorname{tg} 180^\circ = \frac{\operatorname{sn} 180^\circ}{\operatorname{cs} 180^\circ} = \frac{0}{-1} = -0.$$

2) Укажемъ еще ходъ секанса въ III четверти. — Имѣемъ  $\operatorname{sc} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cs} \alpha}$ . Такъ какъ въ III четверти  $\operatorname{cs} \alpha$  отрицателенъ, то и  $\operatorname{sc} \alpha$  отрицателенъ; по абсолютной величинѣ  $\operatorname{cs} \alpha$  уменьшается,

<sup>1)</sup> Замѣтимъ, что это разсужденіе о знакахъ имѣетъ только мнемоническое значеніе, такъ какъ мы обращались уже къ чертежу при самомъ выводѣ формулы  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{cs} \alpha}$ .

) Истинный смыслъ этой условной записи долженъ быть ясенъ учащемуся изъ § 26. Замѣтимъ, что здѣсь необходимо уже различать  $+0$  и  $-0$

слѣдов.  $\operatorname{sc} \alpha$  увеличивается. Для концовъ III четверти получимъ  
 $\operatorname{sc} 180^\circ = \frac{1}{\operatorname{cs} 180^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$  и  $\operatorname{sc} 270^\circ = \frac{1}{\operatorname{cs} 270^\circ} = \frac{1}{-0} = -\infty$ .

3) Подобнымъ же образомъ для  $\operatorname{ctg} 180^\circ$  найдемъ: а) если уголъ  $180^\circ$  относится ко II четверти, то  $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{0} = -\infty$ ; б) если же уголъ  $180^\circ$  относится къ III четверти, то  $\operatorname{ctg} 180^\circ = \frac{-1}{-0} = +\infty$ .

Такъ же поступаемъ и въ остальныхъ случаяхъ.

### Къ § 29. Одинаковыя фазы въ ходѣ периодической функціи.

Въ ходѣ периодической функціи полезно отмѣтить особымъ названіемъ тѣ значенія, которыя не только равны сами, но и сопровождаются соотвѣтственно равными предыдущими и послѣдующими. Они называются одинаковыми фазами<sup>1)</sup>. Такъ, напримѣръ, въ ходѣ синуса при  $30^\circ$  и  $750^\circ$  получаются одинаковыя фазы; а  $30^\circ$  и  $150^\circ$  хотя и даютъ равныя значенія синуса, но это уже не будутъ одинаковыя фазы<sup>2)</sup>.

Пользуясь новымъ понятіемъ, можно періоду дать такое опредѣленіе: *периодъ есть разстояніе по аргументу между ближайшими одинаковыми фазами.*

Къ §§ 33 и 34. Другое доказательство. Пользуясь чертежами § 14, будемъ разсматривать всѣ четверти вмѣстѣ.

а) Въ какой бы четверти ни была точка  $B$ , изъ треугольника  $OBC$  находимъ  $BC^2 + OC^2 = OB^2$ , откуда

$$\frac{BC^2}{R^2} + \frac{OC^2}{R^2} = \frac{OB^2}{R^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = 1.$$

Замѣтимъ теперь, что  $\frac{BC}{R}$  есть абсолютная величина  $\operatorname{sn} \alpha$ ; но будетъ ли  $\operatorname{sn} \alpha$  равенъ  $\frac{BC}{R}$  или  $-\frac{BC}{R}$ , въ томъ и другомъ

<sup>1)</sup> Слово фаза означаетъ собственно явленіе.

<sup>2)</sup> Во II четверти синусъ принимаетъ тѣ же значенія, что и въ I четверти, но порядокъ ихъ обратный

случаѣ  $\left(\frac{BC}{R}\right)^2 = \sin^2 \alpha$ ; точно такъ же всегда  $\left(\frac{OC}{R}\right)^2 = \cos^2 \alpha$ . Такимъ образомъ для каждой четверти имѣемъ  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

б) Во всѣхъ четвертяхъ  $\triangle OEA \propto OBC$ ; слѣдовательно

$$\frac{AE}{OA} = \frac{BC}{OC}, \quad \text{откуда} \quad \frac{AE}{OA} = \frac{BC}{R} \cdot \frac{OC}{R}.$$

Послѣднія три отношенія служатъ *абсолютными величинами* для  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ ; чтобы перейти на самыя функціи, требуются еще сопровождающіе *знаки*<sup>1)</sup>; но въ каждой четверти они таковы, что ихъ можно приписать *безъ нарушенія равенства*: это ясно изъ таблицы знаковъ въ § 27. Такимъ образомъ всегда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

с) Тѣмъ же способомъ докажемъ, что  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

б) Въ каждой четверти  $\triangle OEA \propto OBC$  и слѣдовательно  $\frac{OE}{OA} = \frac{OB}{OC}$ ; отсюда  $\frac{OE}{OA} = \frac{OB}{R} \cdot \frac{OC}{R}$  или  $\frac{OE}{R} \cdot \frac{OC}{R} = 1$ .

Отношенія  $\frac{OE}{R}$  и  $\frac{OC}{R}$  служатъ *абсолютными величинами*

для  $\sec \alpha$  и  $\csc \alpha$ ; но такъ какъ  $\sec \alpha$  и  $\csc \alpha$  вездѣ имѣютъ одинаковые знаки (см. § 27), то произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ равно произведенію самихъ функцій. Такимъ образомъ всегда  $\sec \alpha \cdot \csc \alpha = 1$ .

е) Тѣмъ же приемомъ докажемъ и формулу  $\csc \alpha \cdot \sin \alpha = 1$ .

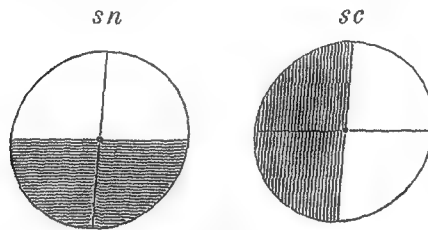
**Къ §§ 32 и 35.** Изъ § 22 видно, что если известна одна какая-либо тригонометрическая функція, то возможно *построить* подвижной радіусъ, а слѣдовательно и найти остальные пять функцій. Но для того, чтобы изъ шести количествъ *одно* можно было назначать *произвольно*, а остальные опредѣлялись бы по нему, эти шесть количествъ должны быть связаны между собой *пятью различными уравненіями*. Такимъ образомъ между тригонометрическими функціями одного и того же угла существуетъ взаимная зависимость, которая сводится къ пяти самостоятельнымъ уравненіямъ.

<sup>1)</sup> Такъ, для II четверти, чтобы перейти на  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , надо имѣть:  $-\frac{AE}{OA}$ ,  $\frac{BC}{R}$  и  $-\frac{OC}{R}$ .

Уравненія § 32 соотвѣтствуютъ сказанному выше: дѣйствительно, мы имѣемъ пять уравненій, и они независимы между собой, потому что каждое слѣдующее содержитъ функцію, какой нѣтъ въ предыдущихъ.

Къ §§ 47 и 48. Слѣдующее соображеніе не только даетъ соотношеніе знаковъ, но и объясняетъ его происхожденіе.

Обратимъ вниманіе на то, что распредѣленіе<sup>1)</sup> знаковъ синуса есть повернутое на  $+90^\circ$  (или на  $90^\circ$ ) распредѣленіе знаковъ косинуса, какъ показываетъ приложенный чертежъ (для



Черт. 70.

наглядности, область отрицательныхъ значений затушевана). Отсюда слѣдуетъ, что  $\sin(\alpha + 90^\circ)$  и  $\cos \alpha$  имѣютъ одинаковые знаки, а  $\cos(\alpha + 90^\circ)$  имѣетъ знакъ одинаковый съ  $\sin(\alpha + 180^\circ)$  и слѣдов. обратный съ  $\sin \alpha$ .

Изъ сказаннаго слѣдуетъ еще, что  $\sin(\alpha + 270^\circ)$  и  $\cos(\alpha + 180^\circ)$  имѣютъ одинаковые знаки, а потому  $\sin(\alpha + 270^\circ)$  и  $\cos \alpha$  имѣютъ противоположные знаки; такъ же найдемъ, что  $\cos(\alpha + 270^\circ)$  имѣетъ знакъ одинаковый съ  $\sin(\alpha + 360^\circ)$ , а слѣдов. и съ  $\sin \alpha$ .

Къ § 55. Понятіе объ обратныхъ круговыхъ функціяхъ. Дуга, соотвѣтствующая данному синусу, очевидно, зависитъ отъ того числа, которое сдѣлано значеніемъ синуса, — есть функція этого числа. То же самое можно сказать и въ случаѣ косинуса, тангенса и т. д. Отсюда возникаетъ понятіе объ обратныхъ круговыхъ<sup>2)</sup> функціяхъ.

<sup>1)</sup> По четвертямъ круга.

<sup>2)</sup> Синусъ, косинусъ и т. д. называются еще *круговыми* функціями, такъ какъ связаны со свойствами круга. Это названіе употребляется преимущественно въ *высшей* математикѣ, и тамъ аргументомъ круговой функціи служитъ не уголъ, а выраженіе дуги въ частяхъ радіуса, разсматриваемое притомъ не какъ мѣра угла, а какъ отвлеченное алгебраическое количество.

Съ этой новой точки зрѣнія мы и будемъ говорить далѣе объ обратныхъ круговыхъ функціяхъ

Соответственно прямым круговым функциям, онѣ имѣютъ слѣдующія названія и обозначенія:

арксинусъ	арккосинусъ	арктангенсъ	арккотангенсъ	арксекансъ	арккосекансъ
$\arcsn$	$\arccs$	$\arctg$	$\operatorname{arccotg}$	$\operatorname{arcsc}$	$\operatorname{arccsc}$

Такъ, можно написать  $y = \arctg x$ ; здѣсь  $y$  есть функція,  $x$  аргументъ,  $\arctg$  знакъ зависимости  $y$  отъ  $x$  (которая состоитъ въ томъ, что для полученія  $y$  надо  $x$  принять за тангенсъ и найти соответствующую дугу). Подобный же смыслъ имѣетъ равенство

$$\arcsn \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 0,52360; \text{ и т. д.}$$

Изъ § 53 слѣдуетъ, что обратныя круговыя функціи суть *многозначныя*<sup>1)</sup>. Во избѣжаніе сбивчивости, обозначеніями  $\arcsn$ ,  $\arccs$  и т. д. пользуются обыкновенно только тогда, когда имѣютъ въ виду одно *простѣйшее* значеніе обратной функціи, т.-е. наименьшее по абсолютной величинѣ, а если такихъ значеній два<sup>2)</sup>, то положительное изъ нихъ (при этомъ условіи  $\arcsn x$ ,  $\arctg x$ ,  $\operatorname{arccotg} x$  и  $\operatorname{arccsc} x$  содержатся между  $+\frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2}$ , а  $\arccs x$  и  $\operatorname{arcsc} x$  между 0 и  $\pi$ ); такъ будемъ имѣть:

$$\arcsn\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad \arccs\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi, \quad \arctg 1 = \frac{\pi}{4}; \text{ и т. д.}$$

Къ §§ 64, 65 и 66. Въ *частныхъ* случаяхъ выводъ формулъ для  $\sin(\alpha \pm \beta)$  и  $\cos(\alpha \pm \beta)$  можно сдѣлать нагляднѣе и, кромѣ того, безъ теоремъ о рѣшеніи треугольника, а исходя лишь изъ основнѣйшихъ понятій тригонометріи. Помѣщаемъ здѣсь примѣръ такого вывода.

<sup>1)</sup> Функція называется *многозначной*, если одному и'тому же значенію аргумента соответствуетъ нѣсколько значеній функціи. Примѣромъ такой функціи въ алгебрѣ можетъ служить корень.

<sup>2)</sup> Какъ въ случаѣ  $\arccs x$  и  $\operatorname{arcsc} x$ .



Раздѣливъ здѣсь каждую линію на  $R$ , получимъ

$$\frac{EK}{R} : \operatorname{sn} \alpha = \frac{OK}{R} : \operatorname{cs} \alpha = \operatorname{cs} \beta : 1 \quad (3)$$

$$\frac{CL}{R} : \operatorname{cs} \alpha = \frac{EL}{R} : \operatorname{sn} \alpha = \operatorname{sn} \beta : 1 \quad (4)$$

Отсюда найдемъ

$$\text{изъ (3)} \quad \frac{EK}{R} = \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta, \quad \frac{OK}{R} = \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta$$

$$\text{изъ (4)} \quad \frac{CL}{R} = \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta, \quad \frac{EL}{R} = \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta.$$

Подставляя эти выраженія въ равенства (1) и (2), будемъ имѣть

$$\operatorname{sn} (\alpha \pm \beta) = \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta \pm \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta$$

$$\operatorname{cs} (\alpha \pm \beta) = \operatorname{cs} \alpha \cdot \operatorname{cs} \beta \mp \operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{sn} \beta.$$

*Замѣчаніе.* Сдѣланный нами выводъ былъ *совмѣстный* для  $\alpha + \beta$  и  $\alpha - \beta$ . При *отдѣльномъ* разборѣ, для случая суммы въ чертежѣ 71 будутъ лишними линіи  $OD$ ,  $DE$ ,  $DH$  и  $DM$ ; но для случая разности слѣдуетъ сохранить тотъ же чертежъ и тѣ же переходы въ линіяхъ, такъ какъ для составленія функцій угла  $\beta$  его надо будетъ построить, какъ *положительный*, влѣво отъ его начального радіуса  $OB^*$ ).

**Къ § 71.** Полезно еще замѣтить, что *всѣ* тригонометрическія функціи какого угодно угла выражаются *рационально*<sup>1)</sup> черезъ тангенсъ *половины* этого угла. Для доказательства достаточно разсмотрѣть  $\operatorname{sn} \alpha$  и  $\operatorname{cs} \alpha$ , потому что остальные функціи выражаются черезъ эти двѣ рационально.

1) Въ равенствѣ  $\operatorname{sn} \alpha = 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$  раздѣлимъ и умножимъ вторую часть на  $\operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$  и примѣнимъ формулы II, IV и VII; получимъ

\*) Уголъ  $BOD$  съ тригонометрической точки зрѣнія есть  $-\beta$ .

1) Т-е. безъ помощи извлеченія корня.



$$\operatorname{sn} \alpha = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{sc}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

2) Въ равенствѣ  $\operatorname{cs} \alpha = \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}$  раздѣлимъ и умножимъ вторую часть на  $\operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2}$  и примѣнимъ тѣ же формулы; получимъ

$$\operatorname{cs} \alpha = \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2} = \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) : \operatorname{sc}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

**Къ § 72. Доказательство двойныхъ знаковъ въ формулахъ XVIII, XIX, XX.** Прежде всего пояснимъ, почему доказательство дѣйствительно требуется. Возьмемъ для примѣра  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . На первый взглядъ двойственность знака можетъ казаться очевидной, потому что тангенсомъ способно быть и положительное и отрицательное число, и ни съ какимъ опредѣленнымъ угломъ онъ здѣсь не связанъ. Но не надо забывать, что хотя уголъ  $\alpha$  и неизвѣстенъ, но предполагается извѣстнымъ  $\operatorname{cs} \alpha$ , а мы не вправѣ рѣшать *заранѣе*, что со всякимъ значеніемъ  $\operatorname{cs} \alpha$  *совмѣстны* оба знака для  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  \*).

\*) Для наглядности замѣтимъ, что съ такимъ же правомъ можно бы предположить, что оба знака для  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  совмѣстны и со всякимъ значеніемъ  $\operatorname{sn} \alpha$ ; а между тѣмъ этого нѣтъ: при данномъ  $\operatorname{sn} \alpha$  возможенъ только *одинъ* знакъ для  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , а именно *одинаковый* съ  $\operatorname{sn} \alpha$  (какъ видно изъ сравненія формулъ  $\operatorname{sn} \alpha = 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$ ).

Если, напримѣръ,  $\operatorname{sn} \alpha = -\frac{3}{5}$ , то, опредѣляя  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  по формулѣ XX, будемъ имѣть: 1)  $\operatorname{cs} \alpha = \pm \frac{4}{5}$  [см. § 36, примѣръ 1 b] и затѣмъ

$$2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\left(1 \mp \frac{4}{5}\right) : \left(1 \pm \frac{4}{5}\right)} = -\frac{1}{3}; -3.$$

[тотъ же результатъ можно получить изъ уравненія  $\operatorname{sn} \alpha = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)$ , выведеннаго въ прибавленіи къ § 71]

Переходимъ къ самому доказательству.

Если данъ  $\cos \alpha$ , а значенія  $\alpha$  ничѣмъ не ограничены, то опредѣленіе функций  $\frac{\alpha}{2}$  равносильно ихъ опредѣленію для *всѣхъ* значеній  $\alpha$ , допускаемыхъ даннымъ значеніемъ косинуса. Пусть будетъ изъ нихъ  $x$  наименьшее положительное; тогда на основаніи § 56 п. 2 будемъ имѣть  $\alpha = \pm x + 360^\circ \cdot n$ , и слѣдовательно

$$\frac{\alpha}{2} = \pm \frac{x}{2} + 180^\circ \cdot n.$$

Посмотримъ, въ какихъ точкахъ оканчиваются дуги этого ряда. Для  $\pm \frac{x}{2}$  получаются двѣ точки на концахъ хорды параллельной вертикальному діаметру, слѣдов. въ двухъ смежныхъ четвертяхъ; для  $\frac{\alpha}{2}$  получимъ: при  $n$  четномъ тѣ же точки, что и раньше, а при  $n$  нечетномъ діаметрально противоположныя имъ. Такимъ образомъ концы дугъ  $\frac{\alpha}{2}$  суть четыре точки, распредѣленныя по *всѣмъ* четвертямъ; слѣдовательно, находя функціи этихъ дугъ, мы встрѣтимъ каждую функцію какъ съ положительнымъ значеніемъ, такъ и съ отрицательнымъ.

Итакъ, если дано значеніе косинуса и требуется опредѣлить значеніе одной изъ функцій подъ единственнымъ условіемъ, что вторая дуга составляетъ половину первой дуги, то задача допускаетъ *два* рѣшенія<sup>1)</sup>.

**Нъ § 73.** Формулы (а) и (b) § 73 можно получить также изъ формулы XX. Покажемъ, почему при этомъ пропадаютъ  $\pm$ , стоящіе передъ  $\sqrt{\dots}$ .

1) Умножимъ въ формулѣ XX числителя и знаменателя подкоренной дроби на  $1 + \cos \alpha$ ; получимъ

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}} = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}}.$$

<sup>1)</sup> Если опредѣлять *отдѣльно*  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , то получаются *два* рѣшенія; если же опредѣлять *подборъ* двухъ изъ этихъ функцій или *всѣхъ* трехъ, то получаются *четыре* рѣшенія.

Но было бы ошибочно всегда замѣнять  $\sqrt{\frac{\operatorname{sn}^2 \alpha}{(1 + \operatorname{cs} \alpha)^2}}$  через  $\frac{\operatorname{sn} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha}$ , что видно изъ слѣдующаго: через  $\sqrt{\dots}$  обозначень *положительный* корень (см. примѣч. къ форм. XX), между тѣмъ какъ  $\frac{\operatorname{sn} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha}$  можетъ имѣть не только положительное, но и отрицательное значеніе<sup>2)</sup>; въ послѣднемъ случаѣ положительнымъ значеніемъ будетъ  $-\frac{\operatorname{sn} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha}$ .

Согласовать знаки можно при помощи слѣдующаго соображенія: значеніе дроби  $\frac{\operatorname{sn} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha}$  положительно или отрицательно въ зависимости отъ  $\operatorname{sn} \alpha$ , такъ какъ  $1 + \operatorname{cs} \alpha$  *всегда* положительно<sup>3)</sup>; но  $\operatorname{sn} \alpha$  имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , что видно изъ разложеній  $\operatorname{sn} \alpha = 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$ ; такимъ образомъ значенія  $\frac{\operatorname{sn} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  *по знаку одинаковы*.

Поэтому, когда мы беремъ  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\dots}$ , то должны при этомъ взять  $\sqrt{\dots} = \frac{\operatorname{sn} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha}$ ; а когда беремъ  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\dots}$ , то при этомъ полагаемъ  $\sqrt{\dots} = -\frac{\operatorname{sn} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha}$ .

Въ обоихъ случаяхъ окончательно будемъ имѣть

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sn} \alpha}{1 + \operatorname{cs} \alpha}$$

2) Для полученія формулы (b) умножимъ подъ корнемъ числителя и знаменателя на  $1 - \operatorname{cs} \alpha$ ; а вопросъ о знакахъ рѣшается такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ.

<sup>1)</sup> Въ зависимости отъ  $\alpha$

<sup>2)</sup> Т-е хотя бы  $\operatorname{cs} \alpha$  былъ и отрицателенъ

Къ §§ 91 и 92. Въ составъ треугольника входятъ три стороны и три угла; но изъ этихъ шести элементовъ достаточно имѣть три (исключая случай трехъ угловъ), чтобы можно было построить треугольникъ и слѣдов. получить остальные три элемента. Если же ихъ можно получить построениемъ, то возможно и вычислить; а для этого должно существовать столько различныхъ уравненій, сколько элементовъ остаются неизвѣстными, т.-е. три уравненія. Итакъ, зависимость между сторонами и углами треугольника сводится къ *тремъ различнымъ* соотношеніямъ. Если соотношеній получено болѣе трехъ, то нѣкоторыя изъ нихъ будутъ уже *слѣдствіями* другихъ.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ основными соотношеніями можно считать, на примѣръ, слѣдующія:

$$A + B = 90^\circ, \quad a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{и} \quad a = c \cdot \sin A.$$

Остальные легко получить какъ ихъ слѣдствие.

Къ §§ 115 и 117 — 120. Въ предыдущемъ<sup>1)</sup> было уже объяснено, что между углами и сторонами треугольника возможны только три независимыхъ соотношенія:

Въ косоугольномъ треугольникѣ такими соотношеніями можно считать, на примѣръ, слѣдующія:

$$A + B + C = 180^\circ \quad (1), \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad (2) \quad \text{и} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} \quad (3).$$

Остальные формулы можно вывести изъ этихъ трехъ.

Для примѣра выведемъ равенство  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .

Прежде всего, на основаніи пропорціи (2) и (3), выразимъ  $a$ ,  $b$  и  $c$  съ помощью общаго множителя, полагая

$$a = k \cdot \sin A, \quad b = k \cdot \sin B \quad \text{и} \quad c = k \cdot \sin C.$$

Теперь получимъ  $a^2 = k^2 \sin^2 A$ ; но изъ рав. (1) слѣдуетъ, что  $\sin A = \sin(B + C)$ ; послѣ этого будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} a^2 &= k^2 \sin^2(B + C) = k^2 (\sin B \cos C + \cos B \sin C)^2 \\ &= k^2 \sin^2 B \cos^2 C + k^2 \cos^2 B \sin^2 C + 2k^2 \sin B \sin C \cos B \cos C \\ &= k^2 \sin^2 B (1 - \sin^2 C) + k^2 \sin^2 C (1 - \sin^2 B) + 2k^2 \sin B \sin C \cos B \cos C \\ &= k^2 \sin^2 B + k^2 \sin^2 C - 2k^2 \sin^2 B \sin^2 C + 2k^2 \sin B \sin C \cos B \cos C \\ &= k^2 \sin^2 B + k^2 \sin^2 C + 2k^2 \sin B \sin C (\cos B \cos C - \sin B \sin C) \\ &= k^2 \sin^2 B + k^2 \sin^2 C + 2k^2 \sin B \sin C \cos(B + C). \end{aligned}$$

Но по условію  $k \cdot \operatorname{sn} B = b$  и  $k \cdot \operatorname{sn} C = c$ , а по рав. (1)  $\operatorname{cs}(B+C) = -\operatorname{cs} A$ . Такимъ образомъ, послѣ замѣны, получимъ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \operatorname{cs} A.$$

**Къ § 126.** Для *постройки* вычисленія, предложеннаго въ § 126, можно воспользоваться отношеніемъ суммы или разности *данныхъ* сторонъ къ третьей сторонѣ; а именно съ помощью § 116 нетрудно получить слѣдующія двѣ формулы:

$$(c+b):a = \operatorname{cs} \frac{C-B}{2} : \operatorname{sn} \frac{A}{2} \quad \text{и} \quad (c-b):a = \operatorname{sn} \frac{C-B}{2} : \operatorname{cs} \frac{A}{2} *).$$

Примѣнимъ, напримѣръ, первую изъ нихъ;  $\lg(c+b)$  и  $\lg a$  возьмемъ готовыми изъ имѣющагося рѣшенія, а  $\lg \operatorname{cs} \frac{1}{2}(C-B)$  и  $\lg \operatorname{sn} \frac{1}{2}A$ , или  $\lg \operatorname{cs} \frac{1}{2}(C+B)$ , найдемъ вновь; повѣрочное вычисленіе будетъ таково:

$$\begin{array}{r|l} \lg(c+b) = 3,49927 & \lg \operatorname{cs} \frac{1}{2}(C-B) = 9,96847 - 10 \\ \lg a = 3,30135 & \lg \operatorname{cs} \frac{1}{2}(C+B) = 9,77055 - 10 \\ \hline 0,19792 & 0,19792 \end{array}$$

*Замѣчаніе.* Мы получили *полное* *совпаденіе* результатовъ, но на это не всегда можно рассчитывать, вслѣдствіе того, что логарифмическое вычисленіе не есть точное; можно во всякомъ случаѣ требовать, чтобы результаты были *достаточно близки* между собою (см. также прибавл. къ § 129).

**Къ § 127.** *Исслѣдованіе задачи по сторонамъ с.* Опредѣлимъ сторону  $c$  съ помощью *данныхъ* — изъ уравненія

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \operatorname{cs} A.$$

Представивъ это уравненіе въ видѣ

$$c^2 - 2b \operatorname{cs} A \cdot c - (a^2 - b^2) = 0,$$

найдемъ

$$c = b \cdot \operatorname{cs} A \pm \sqrt{b^2 \cdot \operatorname{cs}^2 A + (a^2 - b^2)}$$

или

$$c = b \cdot \operatorname{cs} A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \operatorname{sn}^2 A}.$$

Исслѣдуемъ первое выраженіе  $c$  при  $a > b$  и при  $a < b$ .

---

\*) Онѣ извѣстны подѣ именемъ *формулъ Молвегге* (см. также §§ 134 и 135).

I. Пусть  $a > b$ . Если  $a > b$ , то  $a^2 - b^2 > 0$ ; слѣдов. подъ корнемъ сумма положительныхъ чиселъ, и потому значенія  $c$  дѣйствительны. Изъ положительности  $a^2 - b^2$  слѣдуетъ также, что абсолютная величина корня болѣе абсолютной величины  $b \cdot \text{cs } A$ ; поэтому, взявъ  $+\sqrt{\dots}$ , мы получимъ положительное  $c$ , хотя бы  $b \cdot \text{cs } A$  было и отрицательно <sup>1)</sup>; наоборотъ, взявъ  $-\sqrt{\dots}$ , получимъ отрицательное  $c$ , хотя бы  $b \cdot \text{cs } A$  было положительно.

Итакъ, при  $a > b$  задача *всегда* возможна и допускаетъ *одно* рѣшеніе.

II. Пусть  $a < b$ . Въ этомъ случаѣ  $a^2 - b^2 < 0$ ; для дѣйствительности  $c$  требуется, чтобы  $b^2 \text{cs}^2 A + (a^2 - b^2) \geq 0$  или, иначе,  $a^2 - b^2 \text{sn}^2 A \geq 0$ , откуда  $a \geq b \cdot \text{sn } A$  \*). Положимъ, что это условіе выполнено, и сравнимъ по абсолютной величинѣ  $b \cdot \text{cs } A$  и  $\sqrt{\dots}$ . Если  $a^2 - b^2 < 0$ , то  $b^2 \text{cs}^2 A + (a^2 - b^2) < b^2 \text{cs}^2 A$ ; слѣдовательно абсолютная величина корня менѣе абсолютной величины  $b \cdot \text{cs } A$ .

Поэтому, если  $b \cdot \text{cs } A$  отрицательно, т.-е. если уголъ  $A$  тупой, то оба значенія  $c$  будутъ отрицательны; такимъ образомъ при  $A > 90^\circ$  задача невозможна.

Предположимъ теперь, что  $A < 90^\circ$  и слѣдовательно  $b \cdot \text{cs } A$  положительно; тогда, если  $a > b \cdot \text{sn } A$ , то  $c$  имѣетъ два значенія, и они оба положительны; если же  $a = b \cdot \text{sn } A$ , то получается одно рѣшеніе, также положительное.

Итакъ, въ случаѣ  $a < b$  имѣемъ:

- 1) задача невозможна при  $a < b \cdot \text{sn } A$  и при  $A > 90^\circ$ ;
- 2) если  $A < 90^\circ$  и кромѣ того  $a \geq b \cdot \text{sn } A$ , то задача допускаетъ два рѣшенія при  $a > b \cdot \text{sn } A$  и одно рѣшеніе при  $a = b \cdot \text{sn } A$ .

Къ § 129. Выполнимъ ту *поверхку*, которая указана въ примѣчаніи къ примѣру II, 3.

Имѣемъ  $c_1 = 7,99867$  и  $c_2 = 4,12573$ ; слѣдовательно  $\frac{1}{2}(c_1 + c_2) = 6,06220$ ; а вычисляя  $b \cdot \text{cs } A$ , получимъ  $b \cdot \text{cs } A = 6,06214$ . Такимъ образомъ оказалось несовпаденіе на 0,00006, которое объясняется неточностью логарифмическаго вычисленія.

<sup>1)</sup> При  $A$  тупомъ.

\*) Такъ какъ  $a$  и  $b \text{sn } A$  положительны, то можно по неравенству ихъ квадратовъ заключить о такомъ же неравенствѣ первыхъ степеней.

Изъ чертежа 54 видно также, что  $c_1$  и  $c_2$  можно вычислить еще по слѣдующимъ формуламъ:

$$c_1 = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B_1 \quad \text{и} \quad c_2 = b \cdot \cos A - a \cdot \cos B_1.$$

Вычисливъ для этого отдѣльно  $b \cdot \cos A$  и  $a \cdot \cos B_1$ , получимъ затѣмъ

$$c_1 = 7,99864 \quad \text{и} \quad c_2 = 4,12564,$$

значенія, которыя немного отличаются отъ найденныхъ ранѣе.

Эти примѣры, между прочимъ, показываютъ, что въ *приближенномъ* вычисленіи результатъ зависитъ и отъ *способа*, какимъ онъ полученъ.

